

Sbírka úloh z matematiky

pro fyziky

(řešené příklady)

Jiří Tesař

Vypracoval: [David Michálek](#)

Soustavy lineárních rovnic**Příklad 2 / strana 6**

Řešte soustavu rovnic:

$$3x_1 + 6x_2 - x_3 = 4$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & 8 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{/2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right)$$

 $h_s = h_r = n = 3 \Rightarrow$ soustava má jedno řešení

$$-\frac{4}{5}x_3 = \frac{1}{5} \quad / \cdot 5 \quad -4x_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{1}{4}$$

$$5x_2 + 3 \cdot x_3 = 4 \quad 5x_2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 4 \quad 5x_2 - 1 = 4 \quad 5x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3 \cdot x_3 = 2 \quad -x_1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \quad -x_1 + 2 - \frac{3}{4} = 2 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{4}$$

Soustava rovnic má jedno řešení $\left(-\frac{3}{4}; 1; -\frac{1}{4}\right)$.**Příklad 3 / strana 6**

Řešte soustavu rovnic:

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$$

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_3 & x_1 & \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_3 & x_1 & \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_3 & x_1 & \\ 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

 $h_s = h_r = n = 3 \Rightarrow$ jedno řešení

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\frac{3}{2}x_1 = \frac{3}{2} \quad / \cdot 2 \quad 3x_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$

$$-4x_3 + 7x_1 = 3 \quad -4x_3 + 7 \cdot 1 = 3 \quad -4x_3 + 7 = 3 \quad -4x_3 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$$

$$x_2 - 5x_3 + 3x_1 = 0 \quad x_2 - 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0 \quad x_2 - 5 + 3 = 0 \quad x_2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

Soustava rovnic má jedno řešení (1; 2; 1).

Příklad 4 / strana 6

Řešte soustavu rovnic:

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$5x_1 + 4x_2 - x_3 = 17$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 33$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 33 \\ 5 & 4 & -1 & 17 \\ 3 & 2 & 0 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 33 \\ 0 & -6 & -26 & -148 \\ 0 & -4 & -15 & -87 \end{array} \right) / 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 33 \\ 0 & -3 & -13 & -74 \\ 0 & -4 & -15 & -87 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 33 \\ 0 & -3 & -13 & -74 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{35}{3} \end{array} \right)$$

$h_s = h_r = n \Rightarrow$ jedno řešení

$$\frac{7}{3}x_3 = \frac{35}{3} \quad / \cdot 3 \quad 7x_3 = 35 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5$$

$$-3x_2 - 13x_3 = -74 \quad -3x_2 - 13 \cdot 5 = -74 \quad -3x_2 - 65 = -74 \quad -3x_2 = -9 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 33 \quad x_1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 33 \quad x_1 + 31 = 33 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$$

Soustava rovnic má jedno řešení (2; 3; 5).

Příklad 5 / strana 6

Řešte soustavu rovnic:

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 1$$

$$3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2$$

$$6x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 9 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 2 & -21 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array} \right)$$

$h_s = h_r = n = 3 \Rightarrow$ jedno řešení

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$-5x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_2 - 8x_3 = -1 \quad x_2 - 8 \cdot 0 = -1 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + x_2 + 5x_3 = 1 \quad x_1 - 1 + 5 \cdot 0 = 1 \quad x_1 - 1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2$$

Soustava rovnic má jedno řešení $(2; -1; 0)$

Příklad 6 / strana 6

Řešte soustavu rovnic:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4$$

$$4x_1 + x_2 + 6x_3 = -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 6 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -2 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$h_s = h_r = 2$ $n = 3$ $h_s = h_r < n$ \Rightarrow nekonečně mnoho řešení

$$\text{zvolíme } x_3 = 1 \Rightarrow -3x_2 - 2x_3 = -6 \quad -3x_2 - 2 \cdot 1 = -6 \quad -3x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{3}$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \quad x_1 + \frac{4}{3} + 2 \cdot 1 = 1 \quad x_1 + \frac{10}{3} = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{7}{3}$$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $\left(-\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; 1 \right)$.

Příklad 7 / strana 7

Řešte soustavu rovnic:

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2$$

$$5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 4 \end{array} \right)$$

Příklad 8 / strana 7

Řešte soustavu rovnic:

$$3x_1 + \quad + 2x_3 - 2x_4 = 7$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_5 = 5$$

$$7x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 17$$

$$6x_1 - 3x_2 + 15x_3 + 6x_5 = 15$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 3 & 0 & 2 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 2 & 5 \\ 7 & -2 & 12 & -2 & 4 & 17 \\ 6 & -3 & 15 & 0 & 6 & 15 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & \\ -1 & 5 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & 12 & -2 & 4 & 7 & 17 \\ -3 & 15 & 0 & 6 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & \\ -1 & 5 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & \\ -1 & 5 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 & \\ -1 & 5 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$h_s = h_r = 2$ $n = 5$ $h_s = h_r < n$ \Rightarrow nekonečně mnoho řešení

zvolíme 3 neznámé: $x_1 = \frac{5}{3}$; $x_5 = \frac{4}{3}$; $x_4 = -1$

$$2x_3 - 2x_4 + 0x_5 + 3x_1 = 7 \quad 2x_3 - 2 \cdot (-1) + 0 \cdot \frac{4}{3} + 3 \cdot \frac{5}{3} = 7 \quad 2x_3 + 2 + 0 + 5 = 7 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$-x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 2x_5 + 2x_1 = 5 \quad -x_2 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{5}{3} = 5 \quad -x_2 + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 5$$

$$-x_2 + \frac{18}{3} = 5 \quad -x_2 + 6 = 5 \Rightarrow x_2 = 1$$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $\left(\frac{5}{3}; 1; 0; -1; \frac{4}{3} \right)$.

Příklad 9 / strana 7

Řešte soustavu rovnic:

$$2x + 3y + z = 4$$

$$x + 2y + 2z = 6$$

$$5x + y + 4z = 21$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 21 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -9 & -6 & -9 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \end{array}\right) \cdot 3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 7 & 21 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = n = 3 \Rightarrow$ jedno řešení

$7z = 21 \Rightarrow z = 3$

$-y - 3z = -8 \quad -y - 3 \cdot 3 = -8 \quad -y - 9 = -8 \Rightarrow y = -1$

$x + 2y + 2z = 6 \quad x + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 6 \quad x - 2 + 6 = 6 \quad x + 4 = 6 \Rightarrow x = 2$

Soustava rovnic má jedno řešení $(2; -1; 3)$.

Příklad 10 / strana 7

Řešte soustavu rovnic:

$$3x + 5y - z = 0$$

$$x - 2y + z = 5$$

$$4x + 3y = 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -4 & -15 \\ 0 & 11 & -4 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h_s = h_r = 2 \quad n = 3 \quad h_s = h_r < n \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

volíme např.: $z = 1$

$11y - 4z = -15 \quad 11y - 4 \cdot 1 = -15 \quad 11y - 4 = -15 \quad 11y = -11 \Rightarrow y = -1$

$x - 2y + z = 5 \quad x - 2 \cdot (-1) + 1 = 5 \quad x + 2 + 1 = 5 \quad x + 3 = 5 \Rightarrow x = 2$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $(2; -1; 1)$.

Příklad 11 / strana 8

Řešte soustavu rovnic:

$$3x - 5y + z = 0$$

$$2x - 2y + 3z = 5$$

$$x + y - z = 4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & -12 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & -12 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & -8 & 4 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ /: (-6) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$h_s = h_r = n = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{jedno řešení}$$

z matice vyplývá:

$$z = 1$$

$$-4y + 5z = -3 \quad -4y + 5 \cdot 1 = -3 \quad -4y + 5 = -3 \quad -4y = -8 \Rightarrow y = 2$$

$$x + y - z = 4 \quad x + 2 - 1 = 4 \quad x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

Soustava rovnic má jedno řešení $(3; 2; 1)$.

Příklad 12 / strana 8

Řešte soustavu rovnic:

$$x - 3y + 5z = -8$$

$$-x + y - z = 1$$

$$2x + y + z = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 7 & -9 & 19 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & -\frac{11}{2} \end{array} \right)$$

$$h_s = h_r = n = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{jedno řešení}$$

z matice vyplývá:

$$5z = -\frac{11}{2} \quad /:5 \Rightarrow z = -\frac{\frac{11}{2}}{5} = -\frac{11}{10} = -1,1$$

$$-2y + 4z = -7 \quad -2y + 4 \cdot (-1,1) = -7 \quad -2y - 4,4 = -7 \quad -2y = -2,6 \Rightarrow y = 1,3$$

$$x - 3y + 5z = -8 \quad x - 3 \cdot 1,3 + 5 \cdot (-1,1) = -8 \quad x - 3,9 - 5,5 = -8 \quad x - 9,4 = -8 \Rightarrow x = 1,4$$

Soustava rovnic má jedno řešení $(1,4; 1,3; -1,1)$.

Příklad 13 / strana 8

Řešte soustavu rovnic:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = -3$$

$$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1$$

$$-7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$h_s = h_r = 3 \quad n = 4 \quad h_s = h_r < n \quad \Rightarrow \quad \text{nekonečně mnoho řešení}$$

volíme $x_4 = -2$ a z matice vyplývá:

$$2x_3 - 4x_4 = 12 \quad 2x_3 - 4 \cdot (-2) = 12 \quad 2x_3 + 8 = 12 \quad 2x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = -3 \quad x_2 - 2 - 2 = -3 \quad x_2 - 4 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \quad x_1 - 2 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) = 4 \quad x_1 - 2 + 6 + 8 = 4$$

$$x_1 + 12 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -8$$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $(-8; 1; 2; -2)$.

Příklad 15 / strana 9

Řešte soustavu rovnic:

$$x + 2y - z = 0$$

$$3x - y + 2z = 0$$

$$11x + y + 4z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & -21 & 15 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$h_s = h_r = 2 \quad n = 3 \quad h_s = h_r < n \quad \Rightarrow \quad \text{nekonečně mnoho řešení}$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

volíme $z=1$, z matice vyplývá :

$$-7y + 5z = 0 \quad -7y + 5 \cdot 1 = 0 \quad -7y + 5 = 0 \quad -7y = -5 \Rightarrow y = \frac{5}{7}$$

$$x + 2y - z = 0 \quad x + 2 \cdot \frac{5}{7} - 1 = 0 \quad x + 2 \cdot \frac{5}{7} - 1 = 0 \quad x + \frac{3}{7} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{7}$$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $\left(-\frac{3}{7}; \frac{5}{7}; 1\right)$.

Příklad 16 / strana 9

Řešte soustavu rovnic:

$$3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

$$3x_1 + 5x_3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -11 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -11 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{9}{7} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{9}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$h_s = h_r = 3 \quad n = 4 \quad h_s = h_r < n \quad \Rightarrow \text{nekonečně mnoho řešení}$$

volíme $x_4 = -2,8$, z matice vyplývá :

$$2x_3 - \frac{9}{7}x_4 = 0 \quad 2x_3 - \frac{9}{7} \cdot (-2,8) = 0 \quad 2x_3 + 3,6 = 0 \quad 2x_3 = -3,6 \Rightarrow x_3 = -1,8$$

$$7x_2 - 14x_3 - 11x_4 = 0 \quad 7x_2 - 14 \cdot (-1,8) - 11 \cdot (-2,8) = 0 \quad 7x_2 + 25,2 + 30,8 = 0$$

$$7x_2 + 56 = 0 \quad 7x_2 = -56 \Rightarrow x_2 = -8$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \quad x_1 + 8 + 3 \cdot (-1,8) + 2 \cdot (-2,8) = 0 \quad x_1 + 8 - 5,4 - 5,6 = 0$$

$$x_1 - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3$$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $(3; -8; -1,8; -2,8)$.

Příklad 17 / strana 9

Řešte soustavu rovnic:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 26$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 25$$

$$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 24$$

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 23$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 26 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & | & 25 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & | & 24 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & | & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 26 \\ 0 & -0,5 & -1 & -5,5 & | & -14 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & | & -28 \\ 0 & -5,5 & -7 & -8,5 & | & -42 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 26 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & | & -28 \\ 0 & -0,5 & -1 & -5,5 & | & -14 \\ 0 & -5,5 & -7 & -8,5 & | & -42 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 26 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & | & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 30 & | & 112 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /:2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 26 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & | & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 15 & | & 56 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 26 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & | & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & | & 56 \end{pmatrix}$$

$$h_s = h_r = n = 4 \quad \Rightarrow \quad \text{jedno řešení}$$

z matice vyplývá :

$$28x_4 = 56 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 2$$

$$2x_3 - 2x_4 = 0 \quad 2x_3 - 2 \cdot 2 = 0 \quad 2x_3 - 4 = 0 \quad 2x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2$$

$$-x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -28 \quad -x_2 - 6 \cdot 2 - 7 \cdot 2 = -28 \quad -x_2 - 12 - 14 = -28$$

$$-x_2 - 26 = -28 \quad -x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 26 \quad 2x_1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 26 \quad 2x_1 + 6 + 8 + 10 = 26$$

$$2x_1 + 24 = 26 \quad 2x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$

Soustava rovnic má jedno řešení **(1; 2; 2; 2)**.**Příklad 18 / strana 9**

Řešte soustavu rovnic:

$$x + 3y + 2z = 0$$

$$2x - y + 3z = 0$$

$$3x - 5y + 4z = 0$$

$$x + 17y + 4z = 0$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$h_s = h_r = 2$ $n = 3$ $h_s = h_r < n$ \Rightarrow nekonečně mnoho řešení

volíme $z = -7$, z matice vyplývá:

$$-7y - z = 0 \quad -7y + 7 = 0 \quad -7y = -7 \Rightarrow y = 1$$

$$x + 3y + 2z = 0 \quad x + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-7) = 0 \quad x + 3 - 14 = 0 \Rightarrow x = 11$$

Soustava rovnic má ∞ řešení např.: $(11; 1; -7)$.

Vektory

Příklad 1 / strana 17

Zjistěte, zda vektory \mathbf{a} (2; 3; 0), \mathbf{b} (5; 7; 0), \mathbf{c} (-6; 0; 1) a \mathbf{d} (1; 10; 1) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -2 & 0 \\ 0 & 63 & 7 & 0 \\ 0 & -43 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{17} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{18}{17} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $\mathbf{h} = 3$ a počet uvažovaných vektorů $\mathbf{n} = 4 \Rightarrow \mathbf{h} < \mathbf{n} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně závislé.

Příklad 2 / strana 17

Zjistěte, zda vektory \mathbf{a} (3; 2; 0; 1), \mathbf{b} (1; 0; 0; 1), \mathbf{c} (2; 4; 2; 1) a \mathbf{d} (5; 2; 3; 1) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6,5 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $\mathbf{h} = 4$ a počet uvažovaných vektorů $\mathbf{n} = 4 \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{n} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně nezávislé.

Příklad 3 / strana 17

Zjistěte, zda vektory \mathbf{a} (1; 0; 0), \mathbf{b} (2; -1; 1) a \mathbf{c} (1; 1; 3) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $\mathbf{h} = 3$ a počet uvažovaných vektorů $\mathbf{n} = 3 \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{n} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně nezávislé.

Příklad 4 / strana 17

Zjistěte, zda vektory \mathbf{a} (1; 0; -2), \mathbf{b} (3; 1; 0) a \mathbf{c} (-2; 1; 10) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $\mathbf{h} = 2$ a počet uvažovaných vektorů $\mathbf{n} = 3 \Rightarrow \mathbf{h} < \mathbf{n} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně závislé.

Příklad 5 / strana 17

Zjistěte, zda vektory \mathbf{a} (5; 2; -2), \mathbf{b} (3; 1; -1) a \mathbf{c} (-1; 0; 0) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $\mathbf{h} = 2$ a počet uvažovaných vektorů $\mathbf{n} = 3 \Rightarrow \mathbf{h} < \mathbf{n} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně závislé.

Příklad 6 / strana 18

Zjistěte, zda vektory \mathbf{a} (3; 2; 1), \mathbf{b} (1; -2; 2) a \mathbf{c} (1; 2; -3) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $\mathbf{h} = 3$ a počet uvažovaných vektorů $\mathbf{n} = 3 \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{n} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně nezávislé.

Příklad 7 / strana 18

Zjistěte, zda vektory \mathbf{a} (2; 3; 0), \mathbf{b} (5; 7; 0) a \mathbf{c} (0; 1; 2) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y & z & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y & z & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 5 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} y & z & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $\mathbf{h} = \mathbf{3}$ a počet uvažovaných vektorů $\mathbf{n} = \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{n} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně nezávislé.

Příklad 8 / strana 18

Zjistěte, zda vektory \mathbf{a} (2; 1; 0), \mathbf{b} (3; 3; 2) a \mathbf{c} (1; 2; 1) jsou lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $\mathbf{h} = \mathbf{3}$ a počet uvažovaných vektorů $\mathbf{n} = \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{n} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně nezávislé.

Příklad 9 / strana 18

Určete z-ovou souřadnici vektoru \mathbf{a} tak, aby vektory \mathbf{a} (4; 1; a_z), \mathbf{b} (2; -1; -3) a \mathbf{c} (-1; -1; -1/2) byly lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & a_z \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & a_z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & (a_z - 2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & [(a_z - 2) + 4] \end{pmatrix} \Rightarrow a_z - 2 + 4 = 0$$

$$a_z - 2 + 4 = 0 \quad a_z + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_z = -2$$

Příklad 10 / strana 18

Určete souřadnici x vektoru \mathbf{a} tak, aby vektory \mathbf{a} (a_x ; 1; -2), \mathbf{b} (1; 2; -3/2) a \mathbf{c} (2; 2; 1) byly lineárně závislé.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a_x & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & y & x \\ 1 & 2 & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 1 \\ -2 & 1 & a_x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & y & x \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & (a_x + 4) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z & y & x \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & [(a_x + 4) - 4] \end{pmatrix} \Rightarrow [(a_x + 4) - 4] = 0$$

$$a_x + 4 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_x = 0$$

Příklad 12 / strana 19

Je dán bod M (5; -3; 4) [m], určete délku $|\mathbf{OM}|$ a jeho směrové úhly a výsledek ověřte.

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50} = 7,0711 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{5}{7,0711} = 0,7071 \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{-3}{7,0711} = -0,4243 \quad \beta = 115^\circ 6'$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{4}{7,0711} = 0,5657 \quad \gamma = 55^\circ 33'$$

Příklad 15 / strana 19

Síla \mathbf{F} (2; 3; 2) [N] posunula těleso z bodu A (3; 0; 1) [m] po přímce do bodu B (1; 2; 3). Jakou přitom vykonala práci?

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = ((b_1 - a_1); (b_2 - a_2); (b_3 - a_3)) = ((1-3); (2-0); (3-1)) = (-2; 2; 2)$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F_1 \cdot s_1) + (F_2 \cdot s_2) + (F_3 \cdot s_3) = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = -4 + 6 + 2 = 6 \text{ J}$$

Příklad 16 / strana 19

Určete práci, kterou vykoná síla \mathbf{F} (5; 3; 1) [N] působící z bodu X (0; 0; 1) [m] po přímé dráze do bodu Y (1; 1; 3) [m] a určete úhel, který svírá síla \mathbf{F} a dráha \mathbf{s} .

$$\vec{s} = \overrightarrow{XY} = Y - X = ((y_1 - x_1); (y_2 - x_2); (y_3 - x_3)) = ((1-0); (1-0); (3-1)) = (1; 1; 2) \text{ [m]}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F_1 \cdot s_1) + (F_2 \cdot s_2) + (F_3 \cdot s_3) = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5 + 3 + 2 = 10 \text{ J}$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{10}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{25 + 9 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + 4}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{35} \cdot \sqrt{6}} = \frac{10}{5,91612,4495} = \frac{10}{14,4915} = 0,6901 \quad \varphi = 46^\circ 21'$$

Příklad 17 / strana 19

Chlapec táhne sánky do kopce silou \mathbf{F} (100; 0; 20) [N] po dráze \mathbf{s} (20; 0; 1) [m]. Jakou vykoná práci a jaký úhel svírá \mathbf{F} a \mathbf{s} ?

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F_1 \cdot s_1) + (F_2 \cdot s_2) + (F_3 \cdot s_3) = 100 \cdot 20 + 0 \cdot 0 + 20 \cdot 1 = 2000 + 0 + 20 = \mathbf{2020 \text{ J}}$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{2020}{\sqrt{100^2 + 0^2 + 20^2} \cdot \sqrt{20^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2020}{\sqrt{10000 + 400} \cdot \sqrt{400 + 1}} =$$

$$= \frac{2020}{\sqrt{10400} \cdot \sqrt{401}} = \frac{2020}{101,9804 \cdot 20,025} = \frac{2020}{2042,1575} = 0,9891 \quad \varphi = \mathbf{8^\circ 28'}$$

Příklad 18 / strana 19

Určete práci, kterou vykoná síla $F = 6 \text{ N}$ o směrových úhlech 45° ; 60° ; 60° jestliže působí po dráze $\mathbf{s} = (5\sqrt{2}; -6; 3)$ [m]. Dále určete jaký úhel svírají \mathbf{F} a \mathbf{s} .

$$\cos \alpha = \frac{f_1}{|\vec{F}|} \Rightarrow f_1 = \cos \alpha \cdot |\vec{F}| = \cos 45^\circ \cdot 6 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6 = \mathbf{6 \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos \beta = \frac{f_2}{|\vec{F}|} \Rightarrow f_2 = \cos \beta \cdot |\vec{F}| = \cos 60^\circ \cdot 6 = 0,5 \cdot 6 = \mathbf{3}$$

$$\cos \gamma = \frac{f_3}{|\vec{F}|} \Rightarrow f_3 = \cos \gamma \cdot |\vec{F}| = \cos 60^\circ \cdot 6 = 0,5 \cdot 6 = \mathbf{3}$$

$$\vec{F} = \left(\mathbf{6 \frac{\sqrt{2}}{2}}; \mathbf{3}; \mathbf{3} \right) [\text{N}]$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F_1 \cdot s_1) + (F_2 \cdot s_2) + (F_3 \cdot s_3) = 6 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5\sqrt{2} + 3 \cdot (-6) + 3 \cdot 3 = 30 - 18 + 9 = \mathbf{21 \text{ J}}$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{21}{\sqrt{\left(6 \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (-6)^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{21}{\sqrt{18 + 9 + 9} \cdot \sqrt{50 + 36 + 9}} = \frac{21}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{95}} = \frac{21}{6,97468} = \frac{21}{58,4808} = 0,3591 \quad \varphi = \mathbf{68^\circ 57'}$$

Příklad 19 / strana 20

Vypočítejte práci, kterou vykoná síla \mathbf{F} (3; 2; 1) [N] působící po dráze \mathbf{s} (1; 2; 3) [m]. Určete úhel, který svírají \mathbf{F} a \mathbf{s} .

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F_1 \cdot s_1) + (F_2 \cdot s_2) + (F_3 \cdot s_3) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3 + 4 + 3 = \mathbf{10 \text{ J}}$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{10}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{9 + 4 + 1} \cdot \sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} =$$

$$= \frac{10}{(\sqrt{14})^2} = \frac{10}{14} = 0,7143 \quad \varphi = \mathbf{44^\circ 24'}$$

Příklad 20 / strana 20

Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\mathbf{F} (5; 1; 1)$ [N] působící po dráze $\mathbf{s} (3; 5; 5)$ [m] a určete úhel, který svírají \mathbf{F} a \mathbf{s} .

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F_1 \cdot s_1) + (F_2 \cdot s_2) + (F_3 \cdot s_3) = 5 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 15 + 5 + 5 = \mathbf{25 \text{ J}}$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{25}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2 + 5^2}} = \frac{25}{\sqrt{25 + 1 + 1} \cdot \sqrt{9 + 25 + 25}} =$$

$$= \frac{25}{\sqrt{27} \cdot \sqrt{59}} = \frac{25}{5,19627 \cdot 7,6811} = \frac{25}{39,9128} = 0,6264 \quad \varphi = \mathbf{51^\circ 13'}$$

Příklad 21 / strana 20

Jakou potenciální energii (v homogenním gravitačním poli) získá těleso o hmotnosti $m = 5$ kg, pohybuje-li se z počátku souřadnicového systému do bodu $X (3; 1; 2)$ [m] ? Jaký úhel svírá dráha uvedeného pohybu svislým směrem daný osou z ? Orientace gravitačního pole je dána kladným směrem osy z .

$$E_p = m \cdot \vec{g} \cdot \vec{h} \text{ [J]}$$

$$\vec{g} = (0; 0; 10) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{g} = 5 \cdot (0; 0; 10) = 5 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot 10 = (\mathbf{0; 0; 50}) \text{ [N]}$$

$$\vec{h} = \overline{OX} = X - 0 = ((x_1 - 0); (x_2 - 0); (x_3 - 0)) = ((3 - 0); (1 - 0); (2 - 0)) = (\mathbf{3; 1; 2}) \text{ [m]}$$

$$E_p = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F_1 \cdot s_1) + (F_2 \cdot s_2) + (F_3 \cdot s_3) = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 50 \cdot 2 = 0 + 0 + 100 = \mathbf{100 \text{ J}}$$

Příklad 23 / strana 21

Síla $F = 4$ N o směrových úhlech $(60^\circ; 60^\circ; 45^\circ)$ způsobí posunutí $\vec{s} = (-1; 2; \sqrt{2})$ [m]. Jakou při tom vykoná práci?

$$\cos \alpha = \frac{f_1}{|\vec{F}|} \Rightarrow f_1 = \cos \alpha \cdot |\vec{F}| = \cos 60^\circ \cdot 4 = 0,5 \cdot 4 = \mathbf{2}$$

$$\cos \beta = \frac{f_2}{|\vec{F}|} \Rightarrow f_2 = \cos \beta \cdot |\vec{F}| = \cos 60^\circ \cdot 4 = 0,5 \cdot 4 = \mathbf{2}$$

$$\cos \gamma = \frac{f_3}{|\vec{F}|} \Rightarrow f_3 = \cos \gamma \cdot |\vec{F}| = \cos 45^\circ \cdot 4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 = \mathbf{4 \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\vec{F} = \left(\mathbf{2; 2; 4 \frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \text{ [N]}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F_1 \cdot s_1) + (F_2 \cdot s_2) + (F_3 \cdot s_3) = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = -2 + 4 + 4 = \mathbf{6 \text{ J}}$$

Příklad 24 / strana 21

Síla $\mathbf{F} (-3; -1; 0)$ [N] způsobí posunutí hmotného bodu po dráze $\mathbf{s} (-1; -3; 2)$ [m]. Jakou vykoná práci, jaký úhel svírá \mathbf{F} a \mathbf{s} .

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (F_1 \cdot s_1) + (F_2 \cdot s_2) + (F_3 \cdot s_3) = -3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 2 = 3 + 3 + 0 = \mathbf{6 \text{ J}}$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{W}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{6}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{9+1+0} \cdot \sqrt{1+9+4}} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}} = \frac{6}{3,1623 \cdot 3,873} = \frac{6}{12,2476} = 0,4899 \quad \varphi = \mathbf{60^\circ 39'}$$

Příklad 25 / strana 21

Hmotný bod se pohybuje z počátku do bodu $M (10; -10; 20)$ [m] za působení stálé síly. Určete velikost této síly, jestliže svírá se směrem dráhy úhel $\alpha = 60^\circ$ a vykoná práci $W = 6 \text{ J}$.

$$\vec{s} = \overline{OM} = M - 0 = ((m_1 - 0); (m_2 - 0); (m_3 - 0)) = ((10 - 0); (-10 - 0); (20 - 0)) = \mathbf{(10; -10; 20)} [\text{m}]$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow |\vec{F}| = \frac{W}{|\vec{s}| \cdot \cos \alpha} = \frac{6}{\sqrt{10^2 + (-10)^2 + 20^2} \cdot \cos 60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{100 + 100 + 400} \cdot 0,5} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{600} \cdot 0,5} = \frac{6}{24,4949 \cdot 0,5} = \frac{6}{12,2475} = \mathbf{0,4899 \text{ N}}$$

Příklad 26 / strana 21

Určete skalární a vektorový součin vektorů $\mathbf{a} (3; -2; 0)$ a $\mathbf{b} (3; 0; 2)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 2 = 9 + 0 + 0 = \mathbf{9}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-4 + 0)\mathbf{i} - (6 - 0)\mathbf{j} + [0 - (-6)]\mathbf{k} = \mathbf{-4i - 6j + 6k = (-4; -6; 6)}$$

Příklad 27 / strana 21

Vypočtete: $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$, pro \mathbf{a} (2; -3; 1) a \mathbf{b} (3; 0; 0).

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3) = (2 + 3; -3 + 0; 1 + 0) = (5; -3; 1)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3) = (2 - 3; -3 - 0; 1 - 0) = (-1; -3; 1)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3) = (2 + 3; -3 + 0; 1 + 0) = (5; -3; 1)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3) = (2 - 3; -3 - 0; 1 - 0) = (-1; -3; 1)$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= [-3 - (-3)]\mathbf{i} - [5 - (-1)]\mathbf{j} + [(-15 - 3)]\mathbf{k} = \mathbf{0i} - \mathbf{6j} - \mathbf{18k} = (\mathbf{0}; -\mathbf{6}; -\mathbf{18}) \end{aligned}$$

Příklad 28 / strana 21

Vypočtete: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{z}$, pro \mathbf{u} (1; 2; 3), \mathbf{v} (2; 3; 1) a \mathbf{z} (3; 1; 2).

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{z}$ nejprve vypočítáme $(\vec{u} \times \vec{v})$

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (2 - 9)\mathbf{i} - (1 - 6)\mathbf{j} + (3 - 4)\mathbf{k} = \\ &= -\mathbf{7i} + \mathbf{5j} - \mathbf{k} = (-\mathbf{7}; \mathbf{5}; -\mathbf{1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{z} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -7 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= [10 - (-1)]\mathbf{i} - [-14 - (-3)]\mathbf{j} + (-7 - 15)\mathbf{k} = \mathbf{11i} + \mathbf{11j} - \mathbf{22k} = (\mathbf{11}; \mathbf{11}; -\mathbf{22}) \end{aligned}$$

Příklad 29 / strana 21

Určete vektorový a skalární součin vektorů \mathbf{a} (-1; 2; 4) a \mathbf{b} (5; 4; 8)

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (16 - 16)\mathbf{i} - (-8 - 20)\mathbf{j} + (-4 - 10)\mathbf{k} = \mathbf{0i} + \mathbf{28j} - \mathbf{14k} = (\mathbf{0}; \mathbf{28}; -\mathbf{14}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 8 = -5 + 8 + 32 = \mathbf{35} \end{aligned}$$

Příklad 30 / strana 22

Určete vektorový a skalární součin vektorů \mathbf{u} (1; 2; 3) a \mathbf{v} (2; 3; 4).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 2 + 6 + 12 = \mathbf{20}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (8-9)\mathbf{i} - (4-6)\mathbf{j} + (3-4)\mathbf{k} = \mathbf{-i + 2j - k} = \mathbf{(-1; 2; -1)} \end{aligned}$$

Příklad 31 / strana 22

Určete vektorový a skalární součin vektorů \mathbf{x} (-1; 2; 3) a \mathbf{y} (2; 0; 5).

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (10-0)\mathbf{i} - (-5-6)\mathbf{j} + (0-4)\mathbf{k} = \mathbf{10i + 11j - 4k} = \mathbf{(10; 11; -4)} \end{aligned}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = -2 + 0 + 15 = \mathbf{13}$$

Příklad 32 / strana 22

Jsou dány vektory \vec{a} (-2; -4; 1) a \vec{b} (0; -3; 8). Vypočítejte $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ a $(\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{b}$.

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}$ nejprve vypočítáme $(\vec{a} \times \vec{b})$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= [-32 - (-3)]\mathbf{i} - (-16 - 0)\mathbf{j} + (6 - 0)\mathbf{k} = \mathbf{-29i + 16j + 6k} = \mathbf{(-29; 16; 6)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -29 & 16 & 6 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} 16 & 6 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} -29 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} -29 & 16 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= [16 - (-24)]\mathbf{i} - (-29 + 12)\mathbf{j} + (116 + 32)\mathbf{k} = \mathbf{40i + 17j + 148k} = \mathbf{(40; 17; 148)} \end{aligned}$$

$(\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{b}$ nejprve vypočítáme $(\vec{b} \times \vec{a})$

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -3 & 8 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= [-3 - (-32)]\mathbf{i} - [0 - (-16)]\mathbf{j} + (0 - 6)\mathbf{k} = \mathbf{29i - 16j - 6k} = \mathbf{(29; -16; -6)} \end{aligned}$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$(\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 29 & -16 & -6 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot \begin{vmatrix} -16 & -6 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \cdot \begin{vmatrix} 29 & -6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \cdot \begin{vmatrix} 29 & -16 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-128 - 18)\mathbf{i} - (232 - 0)\mathbf{j} + (-87 - 0)\mathbf{k} = -146\mathbf{i} - 232\mathbf{j} - 87\mathbf{k} = (-146; -232; -87)$$

Příklad 33 / strana 22

Pomocí vektorového počtu dokažte, že trojúhelník ABC, s vrcholy A (3; 6), B (-4; 3) a C (1; 1), je pravoúhlý a vypočtete jeho obsah.

$$A = (3; 6), B = (-4; 3), C = (1; 1)$$

$$\vec{a} = \overline{BC} = C - B = (1 - (-4); 1 - 3) = (5; -2)$$

$$\vec{b} = \overline{CA} = A - C = (3 - 1; 6 - 1) = (2; 5)$$

$$\vec{c} = \overline{AB} = B - A = (-4 - 3; 3 - 6) = (-7; -3)$$

Důkaz, že je trojúhelník

pravoúhlý provedeme s pomocí

Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$.

Nejprve zjistíme velikosti

vektorů $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{58}$$

$$|\vec{c}| > |\vec{a}| \text{ a } |\vec{c}| > |\vec{b}| \Rightarrow \vec{c} = \text{přepona}$$

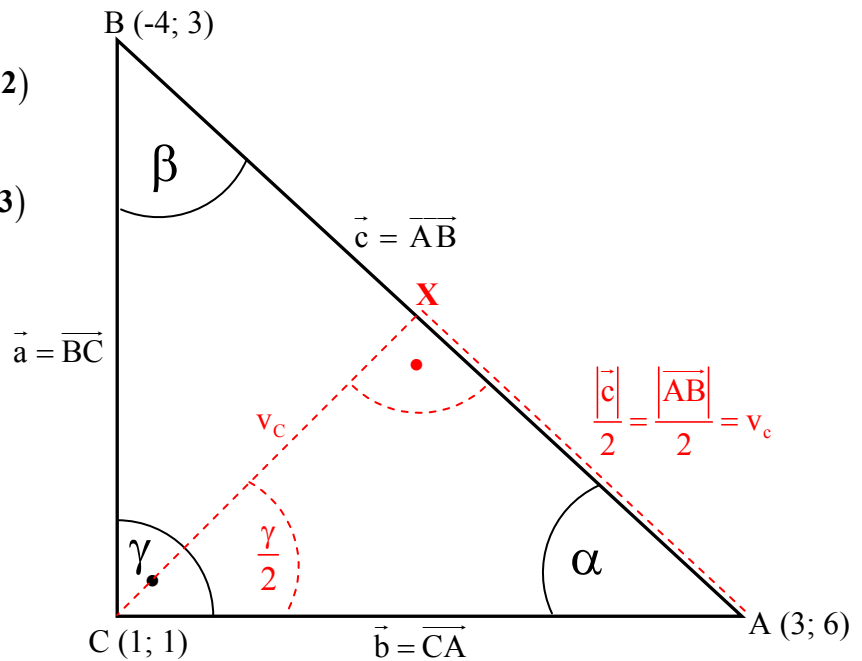
Bude-li se $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$ pak je $\triangle ABC$ pravoúhlý.

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \quad (\sqrt{29})^2 + (\sqrt{29})^2 = (\sqrt{58})^2 \quad 29 + 29 = 58 \Rightarrow 58 = 58$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \text{ a zároveň } |\vec{a}| = |\vec{b}| \Rightarrow \triangle ABC \text{ je pravoúhlý rovnoramenný} \Rightarrow \alpha = \beta = 45^\circ$$

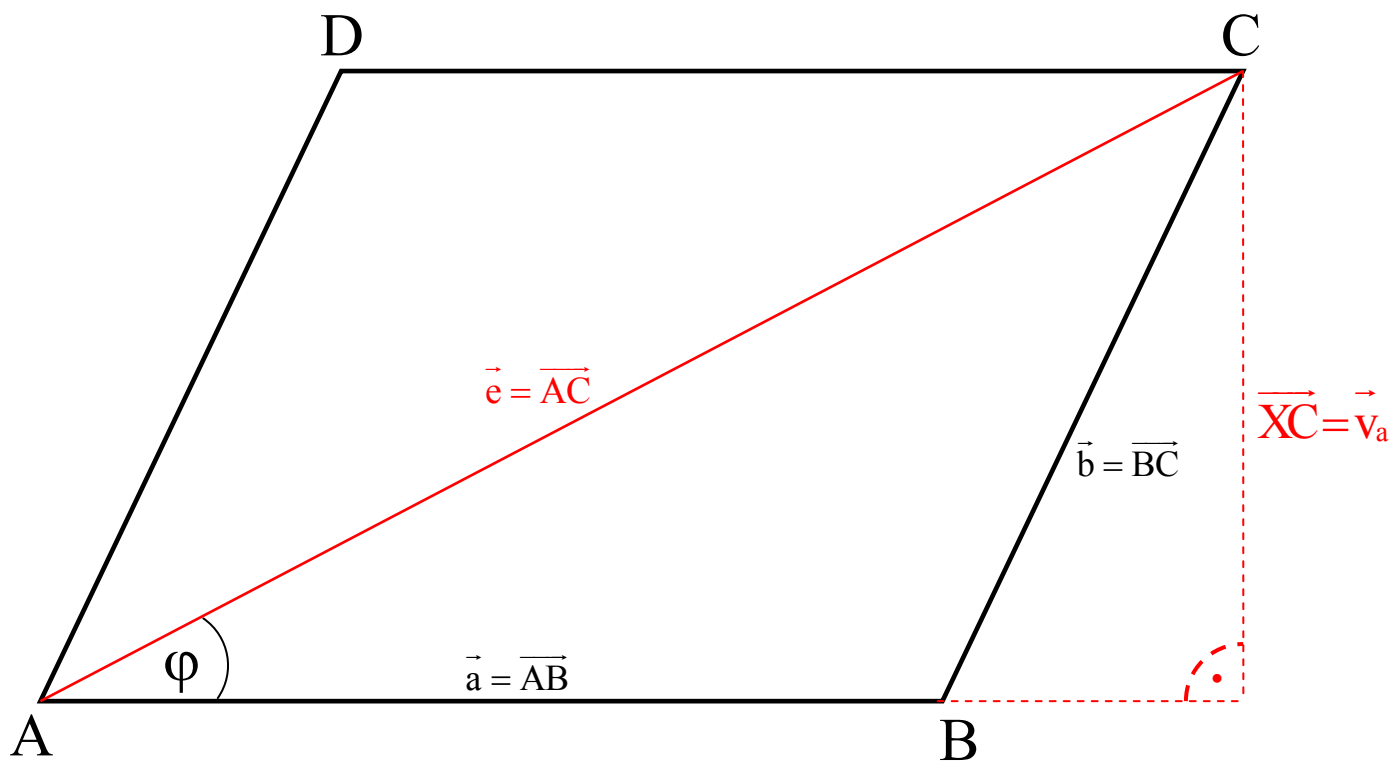
$$\alpha = \frac{\gamma}{2} = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAX \text{ je opět pravoúhlý rovnoramenný} \Rightarrow v_c = \frac{|\vec{c}|}{2} = \frac{|\overline{AB}|}{2}$$

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{|\vec{c}| \cdot \frac{|\vec{c}|}{2}}{2} = \frac{\sqrt{58} \cdot \frac{\sqrt{58}}{2}}{2} = \frac{(\sqrt{58})^2}{4} = \frac{58}{4} = 14,5$$



Příklad 35 / strana 23

Určete obsah rovnoběžníku ABCD, je-li strana $\vec{a} = \overline{AB} = (3; -2; 1)$ a úhlopříčka



$$\vec{e} = \overline{AC} = (5; -1; 3).$$

Nejprve vypočítáme úhel φ , který svírají strana \vec{a} s úhlopříčkou \vec{e} :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}|} = \frac{3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{15 + 2 + 3}{\sqrt{9 + 4 + 1} \cdot \sqrt{25 + 1 + 9}} = \\ &= \frac{20}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} = 0,9035 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 25^\circ 22' \quad |\vec{a}| = \sqrt{14}; \quad |\vec{e}| = \sqrt{35} \end{aligned}$$

$$\sin \varphi = \frac{|\overline{XC}|}{|\vec{e}|} \Rightarrow |\overline{XC}| = |\vec{v}_a| = \sin \varphi \cdot |\vec{e}| = \sin 25^\circ 22' \cdot \sqrt{35} = 2,5345$$

$$S_{\square} = |\vec{a}| \cdot |\vec{v}_a| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} \cdot 2,5345 = \sqrt{9 + 4 + 1} \cdot 2,5345 = \sqrt{14} \cdot 2,5345 \doteq 9,483$$

Příklad 36 / strana 23

Určete vnitřní úhly a plochu trojúhelníku ABC, je-li A (2; -4; 9), B (-1; -4; 5); C (6; -4; 6).

Nejprve z bodů A, B a C určíme vektory \vec{AB} , \vec{BC} a \vec{AC} :

$$\vec{a} = \vec{BC} = C - B = (6 - (-1); -4 - (-4); 6 - 5) = (7; 0; 1)$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = C - A = (6 - 2; -4 - (-4); 6 - 9) = (4; 0; -3)$$

$$\vec{c} = \vec{AB} = B - A = (-1 - 2; -4 - (-4); 5 - 9) = (-3; 0; -4)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{4 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + (-3) \cdot (-4)}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \frac{-12 + 0 + 12}{\sqrt{16 + 0 + 9} \cdot \sqrt{9 + 0 + 16}} = \\ &= \frac{0}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{25}} = 0 \quad \alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \text{ je pravoúhlý} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{7 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-4)}{\sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2}} = \\ &= \frac{-21 - 4}{\sqrt{49 + 1} \cdot \sqrt{9 + 16}} = \frac{-25}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{25}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \beta = 135^\circ \end{aligned}$$

$\beta = 135^\circ \Rightarrow \beta$ je vnější úhel vektorů \vec{a}, \vec{c}

$$\beta' = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

pro součet úhlů v ΔABC platí: $\alpha + \beta' + \gamma = 180^\circ$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta' = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

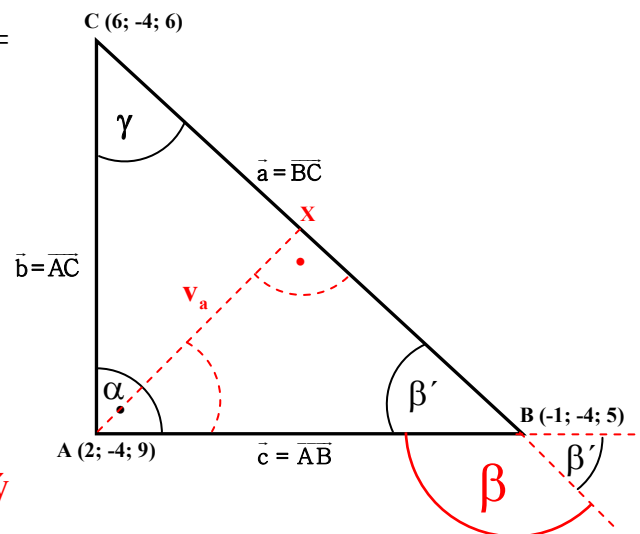
$\beta' = \gamma = 45^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ je pravoúhlý rovnoramenný

$$S_{\Delta} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}_a}{2} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{v}_b}{2} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{v}_c}{2} \text{ musíme vypočítat } \vec{v}_a$$

$$\sin \beta' = \frac{v_a}{|\vec{c}|} \Rightarrow v_a = \sin \beta' \cdot |\vec{c}|$$

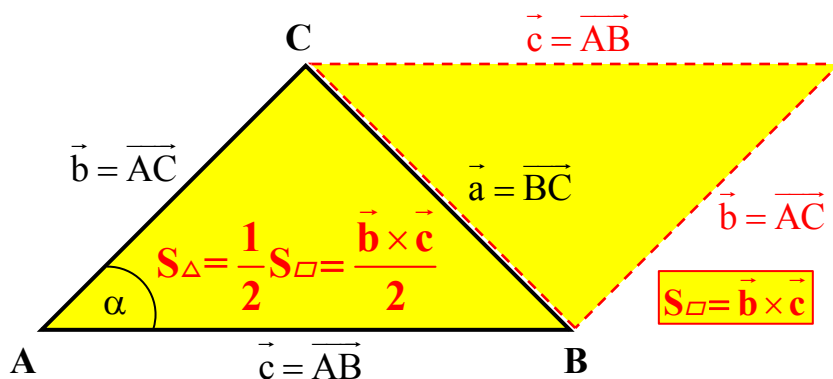
$$v_a = \sin \beta' \cdot |\vec{c}| = \sin 45^\circ \cdot \sqrt{25} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{25}$$

$$S_{\Delta} = \frac{|\vec{a}| \cdot v_a}{2} = \frac{\sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{25}}{2} = \frac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{25}}{4} = \frac{50}{4} = 12,5$$



2. způsob výpočtu obsahu $\triangle ABC$:

Vektorový součin dvou vektorů je obsah rovnoběžníku, přičemž polovina obsahu rovnoběžníku je obsah trojúhelníku tvořený těmito vektory.



$$\vec{S}_{\square} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} - (-16 - 9)\mathbf{j} - 0\mathbf{k} =$$

$$= 0\mathbf{i} + 25\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (0; 25; 0)$$

$$|\vec{S}_{\square}| = \sqrt{0 + 25^2 + 0} = \sqrt{25^2} = 25$$

$$S_{\Delta} = \frac{|\vec{S}_{\square}|}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$$

Příklad 37 / strana 23

Vypočítejte obsah trojúhelníku určeného vektory \mathbf{a} (3; -2; 1) a \mathbf{b} (-2; 1; -1).

$$\vec{S}_{\square} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 1)\mathbf{i} - (-3 + 2)\mathbf{j} +$$

$$+(3 - 4)\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} = (1; 1; -1)$$

$$|\vec{S}_{\square}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad S_{\Delta} = \frac{|\vec{S}_{\square}|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

Příklad 38 / strana 23

Určete plochu trojúhelníka určeného vrcholy A (1; -2; 3), B (2; 1; 0) a C (0; 2; 1).

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0 - 1; 2 - (-2); 1 - 3) = (-1; 4; -2)$$

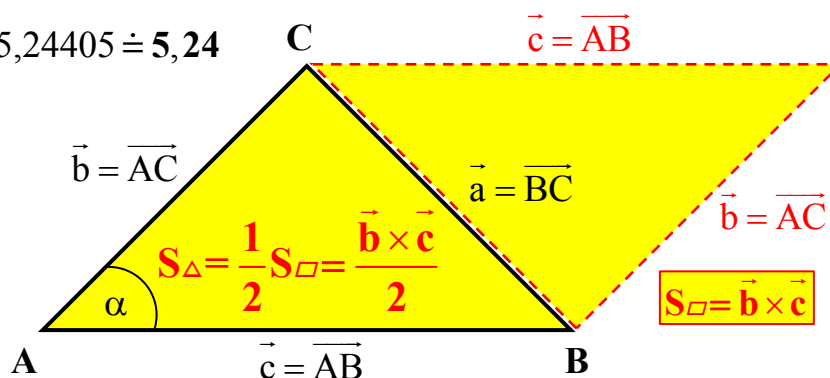
$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2 - 1; 1 - (-2); 0 - 3) = (1; 3; -3)$$

$$\vec{S}_{\square} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-12 - (-6))\mathbf{i} - (3 - (-2))\mathbf{j} + (-3 - 4)\mathbf{k} = -6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = (-6; -5; -7)$$

$$|\vec{S}_{\square}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{36 + 25 + 49} = \sqrt{110}$$

$$S_{\Delta} = \frac{|\vec{S}_{\square}|}{2} = \frac{\sqrt{110}}{2} = \frac{10,4881}{2} = 5,24405 \doteq 5,24$$

**Příklad 39 / strana 23**

Jsou dány vektory \mathbf{a} (3; 1; -2) a \mathbf{b} (0; -2; 1). Určete vektor \mathbf{c} , který je kolmý na rovinu, v níž leží vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} . Určete úhel, který spolu svírají vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} a plochu trojúhelníka vymezeného vektory \mathbf{a} a \mathbf{b} .

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\vec{c} = \vec{S}_{\square} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-4)\mathbf{i} - (3-0)\mathbf{j} + (-6-0)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = (-3; -3; -6)$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{0 - 2 - 2}{\sqrt{9+1+4} \cdot \sqrt{4+1}} =$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} \doteq -0,4781 \quad \varphi = 118^{\circ} 33'$$

$$S_{\Delta} = \frac{|\vec{S}_{\square}|}{2} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-6)^2}}{2} = \frac{\sqrt{9+9+36}}{2} = \frac{\sqrt{54}}{2} \doteq 3,6742$$

Příklad 40 / strana 23

Určete obsah, obvod a úhel α v $\triangle ABC$, je-li dáno: A (1; 1), B (3; 4) a C (-1; 4).

$$\vec{a} = \overline{BC} = C - B = (-1-3; 4-4) = (-4; 0)$$

$$\vec{b} = \overline{AC} = C - A = (-1-1; 4-1) = (-2; 3)$$

$$\vec{c} = \overline{AB} = B - A = (3-1; 4-1) = (2; 3)$$

$$|\vec{a}| = |\overline{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$|\vec{b}| = |\overline{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{c}| = |\overline{AB}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

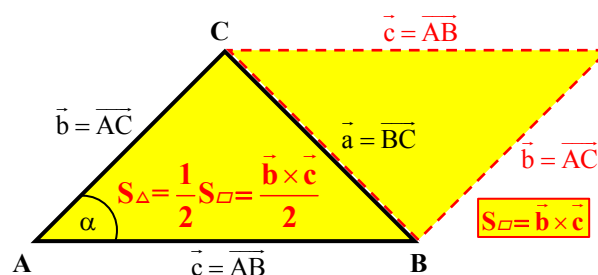
$$\cos \alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{-2 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{-4 + 9}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} =$$

$$= \frac{5}{(\sqrt{13})^2} = \frac{5}{13} \doteq 0,3846 \quad \alpha = 67^{\circ} 22'$$

$$v_c = \sin \alpha \cdot |\vec{b}| = \sin 112^{\circ} 37' \cdot \sqrt{13} = 3,3283$$

$$S_{\Delta} = \frac{|\vec{c}| \cdot v_c}{2} = \frac{\sqrt{13} \cdot 3,3283}{2} \doteq 6$$

$$O_{\Delta} = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| = \sqrt{13} + \sqrt{13} + 4 \doteq 11,2$$



Příklad 41 / strana 23

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

Vypočítejte pomocí vektorového součinu vektorového součinu plochu $\triangle ABC$, je-li

A (3; -1; 5), B (2; 1; 4) a C (-3; 2; 1).

$$\vec{a} = \overline{BC} = C - B = (-3 - 2; 2 - 1; 1 - 4) = (-5; 1; -3)$$

$$\vec{b} = \overline{AC} = C - A = (-3 - 3; 2 - (-1); 1 - 5) = (-6; 3; -4)$$

$$\vec{c} = \overline{AB} = B - A = (2 - 3; 1 - (-1); 4 - 5) = (-1; 2; -1)$$

$$\vec{S}_{\square} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & 1 & -3 \\ -6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-4 - (-9))\mathbf{i} - (20 - 18)\mathbf{j} + (-15 + 6)\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 9\mathbf{k} = (5; -2; -9)$$

$$S_{\triangle} = \frac{|\vec{S}_{\square}|}{2} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2} = \frac{\sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-9)^2}}{2} = \frac{\sqrt{25 + 4 + 81}}{2} = \frac{\sqrt{110}}{2} = \frac{10,49}{2} \doteq 5,245$$

Příklad 44 / strana 24

Určete objem rovnoběžnostěnu, který je tvořen vektory \mathbf{a} (3; 2; 1), \mathbf{b} (-1; 2; 3) a \mathbf{c} (1; -3; 2).

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (\text{smíšený součin vektorů, kde } V \text{ je reálné číslo})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6 - 2)\mathbf{i} - (9 - (-1))\mathbf{j} + (6 - (-2))\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k} = (4; -10; 8)$$

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 4 \cdot 1 + (-10) \cdot (-3) + 8 \cdot 2 = 50$$

Příklad 45 / strana 24

Určete objem trojbokého hranolu určeného vektory \mathbf{a} (3; -2; 1), \mathbf{b} (1; 3; -1) a \mathbf{c} (1; 1; 5).

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$V_{\text{obecně}} = S_{\text{podstavy}} \cdot v$$

$$S_{\text{trojbokého hranolu}} = S_{\Delta} = \frac{S_{\square}}{2} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{S}_{\square} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= (2 - 3)\mathbf{i} - (-3 - 1)\mathbf{j} + (9 + 2)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 11\mathbf{k} = (-1; 4; 11) \end{aligned}$$

$$\vec{S}_{\Delta} = \frac{\vec{S}_{\square}}{2} = \left(-\frac{1}{2}; 2; \frac{11}{2} \right)$$

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \frac{11}{2} \cdot 5 = -\frac{1}{2} + 2 + \frac{55}{2} = 29$$

Příklad 46 / strana 24

Určete, zda vektory \mathbf{a} (1; -3; 0), \mathbf{b} (2; 1; -2) a \mathbf{c} (-1; -4; -2) jsou lineárně závislé.

Pokud nejsou, vypočtete objem čtyřstěnu, který určují.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -7 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice $\mathbf{h} = 3$ a počet uvažovaných vektorů $\mathbf{n} = 3 \Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{n} \Rightarrow$ vektory jsou lineárně nezávislé.

$$V_{\text{čtyřstěnu}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(b_x)^2 + (b_y)^2 + (b_z)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(c_x)^2 + (c_y)^2 + (c_z)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$$

φ_1 je úhel, který svírají vektory \vec{a} a \vec{b}

φ_2 je úhel, který svírá vektor \vec{c} s $(\vec{a} \times \vec{b})$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (6-0)\mathbf{i} - (-2-0)\mathbf{j} + (1-(-6))\mathbf{k} =$$

$$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k} = (6; 2; 7)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{36 + 4 + 49} = \sqrt{89}$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{9}} = \frac{2-3}{9,4868} = -\frac{1}{9,4868} = -0,1054 \quad \varphi_1 = 96^\circ 03'$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{6 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) + 7 \cdot (-2)}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{21}} = -\frac{28}{43,2319} = -0,6477 \quad \varphi_2 = 130^\circ 21'$$

$$V_{\text{čtyřstěnu}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{21} \cdot \sin(96^\circ 03') \cdot \cos(130^\circ 21')}{6} =$$

$$\frac{-27,9908}{6} = |-4,6651| \doteq 4,7$$

Příklad 48 / strana 24

Vypočítejte objem čtyřstěnu s vrcholy 0 (0; 0; 0), A (5; 2; 0), B (2; 5; 0) a C (1; 2; 4).

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\vec{a} = \vec{0A} = A - 0 = (5 - 0; 2 - 0; 0 - 0) = (5; 2; 0)$$

$$\vec{b} = \vec{0B} = B - 0 = (2 - 0; 5 - 0; 0 - 0) = (2; 5; 0)$$

$$\vec{c} = \vec{0C} = C - 0 = (1 - 0; 2 - 0; 4 - 0) = (1; 2; 4)$$

$$V_{\text{čtyřstěnu}} = \frac{1}{6} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (0 - 0)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (25 - 4)\mathbf{k} =$$

$$= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 21\mathbf{k} = (0; 0; 21)$$

$$V_{\text{čtyřstěnu}} = \frac{1}{6} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 21 \cdot 4}{6} = \frac{0 + 0 + 84}{6} = 14$$

Příklad 49 / strana 24

Určete objem jehlanu ABCO, je-li A (3; 2; 1), B (-1; -2; -3); C (0; 0; 5) a O (0; 0; 0).

$$V_{\text{jehlanu}} = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v \quad S_p = S_{\Delta} = \frac{S_{\square}}{2} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{2}$$

$$\vec{a} = \vec{0A} = A - 0 = (3 - 0; 2 - 0; 1 - 0) = (3; 2; 1)$$

$$\vec{b} = \vec{0B} = B - 0 = (-1 - 0; -2 - 0; -3 - 0) = (-1; -2; -3)$$

$$\vec{c} = \vec{v} = \vec{0C} = C - 0 = (0 - 0; 0 - 0; 5 - 0) = (0; 0; 5)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-6 - (-2))\mathbf{i} - (-9 - (-1))\mathbf{j} + (-6 - (-2))\mathbf{k} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k} = (-4; 8; -4)$$

$$S_p = S_{\Delta} = \frac{S_{\square}}{2} = \frac{(\vec{a} \times \vec{b})}{2} = \left(-\frac{4}{2}; \frac{8}{2}; -\frac{4}{2} \right) = (-2; 4; -2)$$

$$V_{\text{jehlanu}} = \frac{1}{3} \cdot S_p \cdot v = \frac{1}{3} \cdot [0 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + 5 \cdot (-2)] = \frac{1}{3} \cdot (0 + 0 - 10) = \left| -\frac{10}{3} \right| = \frac{10}{3} = 3,33$$

Příklad 50 / strana 25

Vypočítejte moment síly \vec{F} (3; 4; 2) [N] působící v bodě A (3; 1; 0) vzhledem k počátku a jeho velikost.

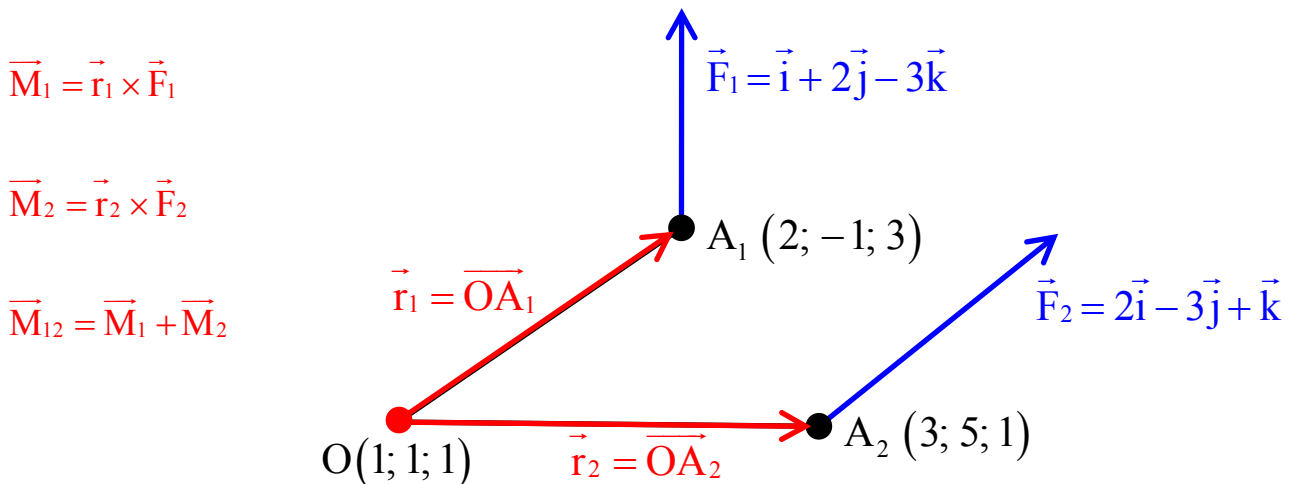
$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} = A - 0 = (3 - 0; 1 - 0; 0 - 0) = (3; 1; 0) \text{ [m]}$$

$$\begin{aligned} \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (2 - 0)\mathbf{i} - (6 - 0)\mathbf{j} + (12 - 3)\mathbf{k} = \\ &= 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k} = (2; -6; 9) \text{ [N} \cdot \text{m]} \end{aligned}$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2} = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 9^2} = \sqrt{4 + 36 + 81} = \sqrt{121} = 11 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Příklad 51 / strana 25

Určete výsledný moment \vec{M} síly $\vec{F}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ [N], která působí v bodě A_1 (2; -1; 3) [m] a síly $\vec{F}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ [N] s působištěm v bodě A_2 (3; 5; 1) [m] vzhledem k bodu O (1; 1; 1) [m].



$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA_1} = A_1 - O = (2 - 1; -1 - 1; 3 - 1) = (1; -2; 2) \text{ [m]}$$

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OA_2} = A_2 - O = (3 - 1; 5 - 1; 1 - 1) = (2; 4; 0) \text{ [m]}$$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6 - 4)\mathbf{i} - (-3 - 2)\mathbf{j} + (2 - (-2))\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = (2; 5; 4) \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

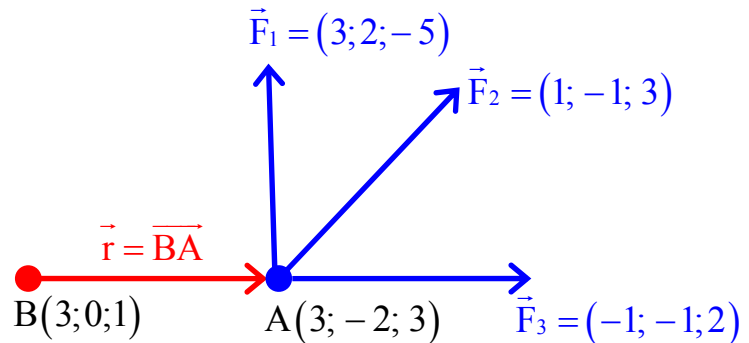
$$\begin{aligned}\vec{M}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= (4-0)\mathbf{i} - (2-0)\mathbf{j} + (-6-8)\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 14\mathbf{k} = (4; -2; -14) [\text{N} \cdot \text{m}] \\ \vec{M}_{12} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = (2+4; 5+(-2); 4+(-14)) = (6; 3; -10) [\text{N} \cdot \text{m}] \\ |\vec{M}_{12}| &= \sqrt{6^2 + 3^2 + (-10)^2} = \sqrt{36+9+100} = \sqrt{145} = 12,0416 \doteq 12 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Příklad 52 / strana 25

Na těleso působí tři síly $\vec{F}_1 = (3; 2; -5) [\text{N}]$, $\vec{F}_2 = (1; -1; 3) [\text{N}]$ a $\vec{F}_3 = (-1; -1; 2) [\text{N}]$ v bodě A $(3; -2; 3) [\text{m}]$. Určete celkový moment sil vzhledem k bodu B $(3; 0; 1) [\text{m}]$, jeho velikost a jeho směrové úhly.

$$\vec{F}_{123} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{M}_{123} = \vec{r} \times \vec{F}_{123}$$



$$\vec{r} = \vec{BA} = \vec{A} - \vec{B} = (3-3; -2-0; 3-1) = (0; -2; 2) [\text{m}]$$

$$\vec{F}_{123} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (3+1+(-1); 2+(-1)+(-1); -5+3+2) = (3; 0; 0) [\text{N}]$$

$$\vec{M}_{123} = \vec{r} \times \vec{F}_{123} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (0-0)\mathbf{i} - (0-6)\mathbf{j} + (0-(-6))\mathbf{k} = 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k} = (0; 6; 6) [\text{N} \cdot \text{m}]$$

$$|\vec{M}_{123}| = \sqrt{0^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{0+36+36} = \sqrt{72} = 8,4853 \doteq 8,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

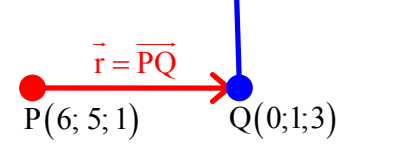
$$\cos \alpha = \frac{m_{123_x}}{|\vec{M}_{123}|} = \frac{0}{8,4853} = 0 \quad \alpha = 90^\circ \quad \cos \beta = \frac{m_{123_y}}{|\vec{M}_{123}|} = \frac{6}{8,4853} \doteq 0,7071 \quad \beta \doteq 45^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{m_{123_z}}{|\vec{M}_{123}|} = \frac{6}{8,4853} \doteq 0,7071 \quad \gamma = 45^\circ$$

Příklad 53 / strana 25

Určete velikost a směr momentu síly $\vec{F}(21;14;-8)$ [N], která působí v bodě Q (0; 1; 3) [m] vzhledem k P (6; 5; 1) [m].

$$\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (0 - 6; 1 - 5; 3 - 1) = (-6; -4; 2) \text{ [m]}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & -4 & 2 \\ 21 & 14 & -8 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 14 & -8 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 21 & -8 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 21 & 14 \end{vmatrix} =$$


$$= (32 - 28)\mathbf{i} - (48 - 42)\mathbf{j} + (-84 - (-84))\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (4; -6; 0) \text{ [N} \cdot \text{m]}$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{16 + 36 + 0} = \sqrt{52} = 7,2111 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\cos \alpha = \frac{m_x}{|\vec{M}|} = \frac{4}{7,2111} \doteq 0,5547 \quad \alpha = 56^\circ 18'$$

$$\cos \beta = \frac{m_y}{|\vec{M}|} = \frac{-6}{7,2111} \doteq -0,8321 \quad \beta = 146^\circ 18'$$

$$\cos \gamma = \frac{m_z}{|\vec{M}|} = \frac{0}{7,2111} = 0 \quad \gamma = 90^\circ$$

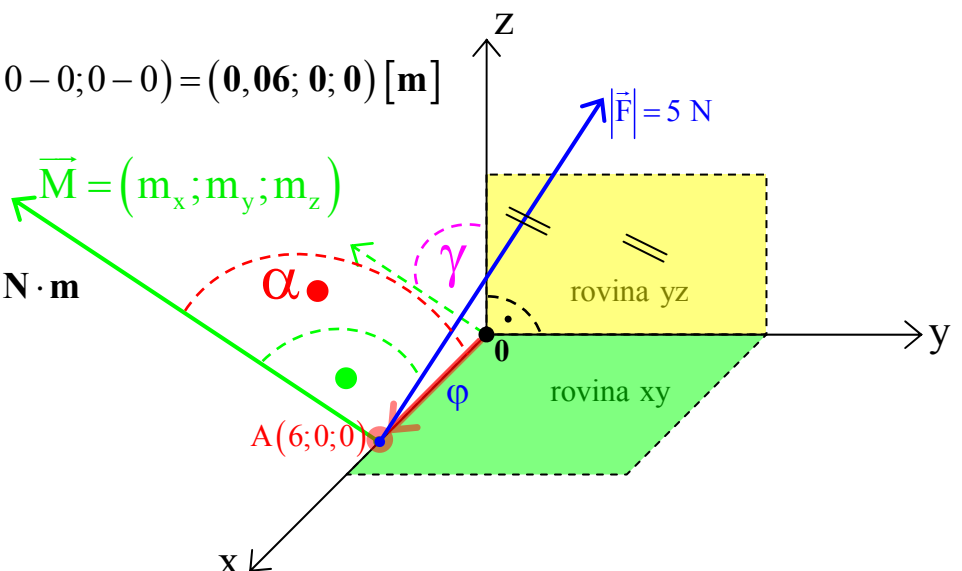
Příklad 54 / strana 25

Vypočítejte souřadnice a velikost momentu síly \vec{F} , která vychází z bodu A(6; 0; 0) [cm], vzhledem k počátku, je-li $|\vec{F}| = 5$ N a úhel φ , který svírá síla \vec{F} s rovinou xy je 60° v kladném směru osy z, přičemž síla \vec{F} je rovnoběžná s rovinou yz.

$$\vec{r} = \overrightarrow{0A} = A - 0 = (0,06 - 0; 0 - 0; 0 - 0) = (0,06; 0; 0) \text{ [m]}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{0,06^2} = 0,06 \text{ m}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| = 0,06 \cdot 5 = 0,3 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

\vec{M} svírá s osou x úhel $\alpha \Rightarrow$ z obr. $\alpha = 90^\circ$, protože $\vec{M} \perp \vec{r}$

$$\cos \alpha = \frac{m_x}{|\vec{M}|} \Rightarrow m_x = \cos \alpha \cdot |\vec{M}| = \cos(90^\circ) \cdot 0,3 = 0 \cdot 0,3 = \mathbf{0 \text{ N} \cdot \mathbf{m}}$$

\vec{M} svírá s osou y úhel $\beta \Rightarrow$ z obr. $\beta = \varphi + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = \mathbf{150^\circ}$, protože $\vec{M} \perp \vec{F}$

$$\cos \beta = \frac{m_y}{|\vec{M}|} \Rightarrow m_y = \cos \beta \cdot |\vec{M}| = \cos(150^\circ) \cdot 0,3 = -0,8660 \cdot 0,3 = \mathbf{-0,2598 \text{ N} \cdot \mathbf{m}}$$

\vec{M} svírá s osou z úhel $\gamma \Rightarrow \gamma = 60^\circ$, protože $\gamma = \beta - 90^\circ = 150^\circ - 90^\circ = \mathbf{60^\circ}$

$$\cos \gamma = \frac{m_z}{|\vec{M}|} \Rightarrow m_z = \cos \gamma \cdot |\vec{M}| = \cos(60^\circ) \cdot 0,3 = 0,5 \cdot 0,3 = \mathbf{0,15 \text{ N} \cdot \mathbf{m}}$$

$$\vec{M} = (m_x; m_y; m_z) = (\mathbf{0}; \mathbf{-0,2598}; \mathbf{0,15}) [\mathbf{N} \cdot \mathbf{m}]$$

Příklad 55 / strana 25

Určete celkový moment síly a jeho velikost, jestliže na těleso působí síly

$\vec{F}_1(1; -2; 3)$ [N] a $\vec{F}_2(3; 2; 0)$ [N] v bodě B (2; 0; 2) [m] vzhledem k bodu

A (0; -1; 1) [m].

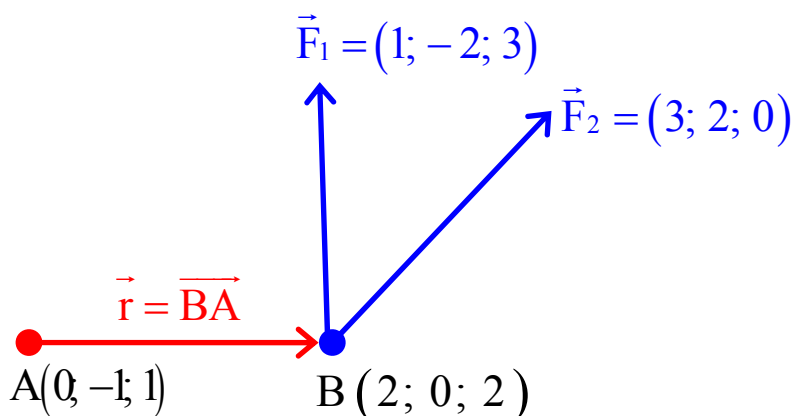
$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2 - 0; 0 - (-1); 2 - 1) = (\mathbf{2}; \mathbf{1}; \mathbf{1}) [\mathbf{m}]$$

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (1 + 3; -2 + 2; 3 + 0) = (\mathbf{4}; \mathbf{0}; \mathbf{3}) [\mathbf{N}]$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (3 - 0)\mathbf{i} - (6 - 4)\mathbf{j} + (0 - 4)\mathbf{k} =$$

$$= \mathbf{3i} - \mathbf{2j} - \mathbf{4k} = (\mathbf{3}; \mathbf{-2}; \mathbf{-4}) [\mathbf{N} \cdot \mathbf{m}]$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29} \doteq \mathbf{5,3852 \text{ N} \cdot \mathbf{m}}$$



Limity

Příklad 6.1 / strana 39

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \cdot (x^2 + 3)}{\cancel{x} \cdot (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3}{x - 2} = \frac{0^2 + 3}{0 - 2} = -\frac{3}{2}$$

Příklad 6.2 / strana 39

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x} &= \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Příklad 6.3 / strana 39

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{3x} &= \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\cos 0^\circ} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Příklad 6.4 / strana 40

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \cdot (x^2 + 3x + 3)}{\cancel{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 3x + 3 = 0^2 + 3 \cdot 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$(x+1)^3$ jsme rozložili podle vzorce $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Příklad 6.5 / strana 40

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x+1) \cdot (x-1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1-2}{(x+1) \cdot (x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(x+1) \cdot (x-1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x^2 - 1$ jsme rozložili podle vzorce $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Příklad 6.6 / strana 40

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad \text{do rovnice dostadíme } x = t^3 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{t^3} - 1}{\sqrt{t^3} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{t-1}{\sqrt{t^3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{t^3} + 1}{\sqrt{t^3} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (\sqrt{t^3} + 1)}{(\sqrt{t^3} - 1) \cdot (\sqrt{t^3} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (\sqrt{t^3} + 1)}{t^3 - 1} = \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(t-1) \cdot (\sqrt{t^3} + 1)}{(t-1) \cdot (t^2 + t + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{t^3} + 1)}{(t^2 + t + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{t^3} + 1)}{t \cdot (t + 1 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{x} + 1 + 1)} = \\ = \frac{(\sqrt{1} + 1)}{\sqrt[3]{1} \cdot (\sqrt[3]{1} + 1 + 1)} = \frac{1 + 1}{1 \cdot (1 + 1 + 1)} = \frac{2}{3} \quad x = t^3 \Rightarrow t = \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Příklad 6.8 / strana 40

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 3 \cdot 1 = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Příklad 6.9 / strana 40

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2}} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2})} = \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{(x+2) - 2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{2})}{x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+2} + \sqrt{2}) = \\ &= 2 \cdot (\sqrt{0+2} + \sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 2 \cdot (2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned}$$

Příklad 6.10 / strana 40

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{x \cdot \sin x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \cdot \sin x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \sin x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin x}{x \cdot \sin x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot 1 = 2\end{aligned}$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

Příklad 6.12 / strana 40

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{\sin 2t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{2 \cdot \sin t \cdot \cos t} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sin t \cdot \cos^2 t} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 t} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\cos 0^\circ)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1)^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Derivace

Příklad 7.1 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = x^4 - 3x^2 - 5x + 6$:

$$y = x^4 - 3x^2 - 5x + 6$$

$$y' = 4x^3 - 6x - 5$$

Příklad 7.2 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = x^2 \cdot (x - 1)$:

$$y = x^2 \cdot (x - 1) \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y' = 2x \cdot (x - 1) + x^2 = 3x^2 - 2x$$

Příklad 7.3 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3}$:

$$y = x^2 \cdot \sqrt[4]{x^3} = x^2 \cdot x^{\frac{3}{4}} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y' = 2x \cdot x^{\frac{3}{4}} + x^2 \cdot \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = 2x^{\left(1+\frac{3}{4}\right)} + \frac{3}{4} x^{\left(2-\frac{1}{4}\right)} = 2x^{\frac{7}{4}} + \frac{3}{4} x^{\frac{7}{4}} = \frac{11}{4} x^{\frac{7}{4}}$$

Příklad 7.4 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$$

$$y' = -x^{(-1-1)} - 2x^{(-2-1)} - 3x^{(-3-1)} = -x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

Příklad 7.5 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = \cos 2x + \sin^2 x$:

$$y = \cos 2x + \sin^2 x$$

$$y' = -\sin 2x \cdot 2 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -\sin 2x \cdot 2 + \sin 2x =$$

$$= \sin 2x \cdot [(-1) \cdot 2 + 1] = \sin 2x \cdot (-1) = -\sin 2x$$

Příklad 7.6 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = x \cdot (\ln x) - x$:

$$y = x \cdot (\ln x) - x \quad y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y' = \left[(1 \cdot \ln x) + \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) \right] - 1 = \left(\ln x + \frac{x}{x} \right) - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Příklad 7.7 / strana 41

Určete derivaci funkce $y = \frac{1}{2} \sin(3x - 2)$:

$$y = \frac{1}{2} \sin(3x - 2) \quad \sin(3x - 2) \text{ je funkce složená}$$

$$y' = \frac{1}{2} [\cos(3x - 2) \cdot 3] = \frac{3}{2} \cos(3x - 2)$$

Příklad 7.8 / strana 42

Určete derivaci funkce $y = \frac{2x^2 - 1}{3x + 4}$:

$$y = \frac{2x^2 - 1}{3x + 4} \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(2 \cdot 2x) \cdot (3x + 4) - (2x^2 - 1) \cdot 3}{(3x + 4)^2} = \frac{4x \cdot (3x + 4) - 3 \cdot (2x^2 - 1)}{(3x + 4)^2} =$$

$$= \frac{12x^2 + 16x - (6x^2 - 3)}{(3x + 4)^2} = \frac{12x^2 + 16x - 6x^2 + 3}{(3x + 4)^2} = \frac{6x^2 + 16x + 3}{(3x + 4)^2} = \frac{6x^2 + 16x + 3}{9x^2 + 24x + 16}$$

Příklad 7.9 / strana 42

Určete derivaci funkce $y = \frac{2x^2}{(2-x)^2}$:

$$y = \frac{2x^2}{(2-x)^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \text{přičemž } (2-x)^2 \text{ je funkce složená}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left[(2 \cdot 2x) \cdot (2-x)^2 \right] - \left[2x^2 \cdot 2(2-x) \cdot (-1) \right]}{\left[(2-x)^2 \right]^2} = \frac{\left[(4x) \cdot (2-x)^2 \right] - \left[4x^2 \cdot (2-x) \cdot (-1) \right]}{(2-x)^4} = \\ &= \frac{\left[(4x) \cdot (4-4x+x^2) \right] - \left[-4x^2 \cdot (2-x) \right]}{(2-x)^4} = \frac{\left[16x - 16x^2 + 4x^3 \right] - \left[-8x^2 + 4x^3 \right]}{(2-x)^4} = \\ &= \frac{16x - 16x^2 + 4x^3 + 8x^2 - 4x^3}{(2-x)^4} = \frac{16x - 8x^2}{(2-x)^4} = \frac{8x \cdot (2-x)}{(2-x)^4} = \frac{8x}{(2-x)^3} \end{aligned}$$

Příklad 7.10 / strana 42

Určete derivaci funkce $y = \frac{1-2x^2}{(1-2x)^2}$:

$$y = \frac{1-2x^2}{(1-2x)^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \text{přičemž } (1-2x)^2 \text{ je funkce složená}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left[(-4x) \cdot (1-2x)^2 \right] - \left[(1-2x^2) \cdot 2 \cdot (1-2x) \cdot (-2) \right]}{\left[(1-2x)^2 \right]^2} = \\ &= \frac{\left[(-4x) \cdot (1-2x) \cdot (1-2x) \right] - \left[(1-2x^2) \cdot 2 \cdot (1-2x) \cdot (-2) \right]}{(1-2x)^4} = \\ &= \frac{(1-2x) \cdot \left\{ \left[(-4x) \cdot (1-2x) \right] - \left[(1-2x^2) \cdot 2 \cdot (-2) \right] \right\}}{(1-2x)^4} = \\ &= \frac{\left[(-4x) \cdot (1-2x) \right] - \left[(-4)(1-2x^2) \right]}{(1-2x)^3} = \frac{(-4x + 8x^2) - (-4 + 8x^2)}{(1-2x)^3} = \\ &= \frac{-4x + 8x^2 + 4 - 8x^2}{(1-2x)^3} = \frac{4-4x}{(1-2x)^3} = \frac{4 \cdot (1-x)}{(1-2x)^3} \end{aligned}$$

Příklad 7.11 / strana 42

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

Určete derivaci funkce $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$:

$$y = \sqrt{1 + \sqrt{x}} = \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ je funkce složená}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{1 + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{x + x^{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{x + x \cdot \sqrt{x}}}$$

Příklad 7.12 / strana 42

$$y = x \cdot \sqrt{x^2 - 1} = x \cdot (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \text{přičemž } (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \text{ je funkce složená}$$

$$y' = \left[1 \cdot \sqrt{x^2 - 1}\right] + \left[x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right] = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} x \cdot 2x \cdot (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 1} + x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{(\sqrt{x^2 - 1}) \cdot (\sqrt{x^2 - 1}) + x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x^2 - 1 + x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Určete derivaci funkce $y = x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$:

Příklad 7.13 / strana 42

Určete derivaci funkce $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$:

$$y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{\left[e^x \cdot (1 - e^x)\right] - \left[(1 + e^x) \cdot (-e^x)\right]}{(1 - e^x)^2} = \frac{e^x \cdot (1 - e^x) + e^x \cdot (1 + e^x)}{(1 - e^x)^2} =$$

$$= \frac{e^x - (e^x)^2 + e^x + (e^x)^2}{(1 - e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1 - e^x)^2}$$

Příklad 7.14 / strana 42

Určete derivaci funkce $y = \sqrt{1-x}$:

$$y = \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} \quad (1-x)^{\frac{1}{2}} \text{ je funkce složená}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x}}$$

Příklad 7.15 / strana 42

Určete derivaci funkce $y = x^2 \cdot \log_3 x$:

$$y = x^2 \cdot \log_3 x \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y' = (2x \cdot \log_3 x) + \left(x^2 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3} \right) = 2x \cdot \log_3 x + \frac{x}{\ln 3} = x \cdot \log_3 x^2 + \frac{x}{\ln 3} = x \cdot \left(\log_3 x^2 + \frac{1}{\ln 3} \right)$$

Příklad 7.16 / strana 42

Určete derivaci funkce $y = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$:

$$y = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) = \ln(\operatorname{tg} 0,5x)$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} 0,5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 0,5x} = \frac{1}{\frac{\sin 0,5x}{\cos 0,5x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 0,5x} = \frac{\cos 0,5x}{\sin 0,5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 0,5x} =$$

$$= \frac{1}{\sin 0,5x \cdot \cos 0,5x} = \frac{1}{\sin x} \quad \sin 2x = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin 0,5x \cdot \cos 0,5x = \sin x$$

Příklad 7.17 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x$:

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$y = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x \quad \frac{1}{\cos x} = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + 1}{1 - \sin^2 x} = \frac{\sin x + 1}{1 - (\sin x)^2} =$$
$$= \frac{\sin x + 1}{(1 - \sin x) \cdot (1 + \sin x)} = \frac{1}{1 - \sin x}$$

$1 - (\sin x)^2$ jsme rozložili podle vzorce $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Příklad 7.18 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}$:

$$y' = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2 + 1}} \cdot \frac{[e^x \cdot (x^2 + 1)]' - [e^x \cdot 2x]}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1}{e^x} \cdot \frac{e^x \cdot (x^2 + 1 - 2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)}{e^x \cdot (x^2 + 1)^2} =$$
$$= \frac{e^x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)}{e^x \cdot (x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}$$

$x^2 - 2x + 1$ je vzorec $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1} \quad \text{je složená funkce, kde } \frac{e^x}{x^2 + 1} = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Příklad 7.19 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$:

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{[\cos x \cdot (\sin x + \cos x)] - [\sin x \cdot (\cos x - \sin x)]}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x) - (\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x} = \frac{1}{1 + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{1 + \sin 2x}$$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

Příklad 7.20 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = \sqrt{4x-1} + \operatorname{arccot} g \sqrt{4x-1}$:

$$y = \sqrt{4x-1} + \operatorname{arccot} g \sqrt{4x-1} = (4x-1)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{arccot} g (4x-1)^{\frac{1}{2}} \quad (u+v)' = u'+v'$$

$\sqrt{4x-1}$ je funkce složená; $\operatorname{arccot} g \sqrt{4x-1}$ je dvojitá složená funkce

$$y' = \left[\frac{1}{2} \cdot (4x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 \right] + \left[\frac{-1}{1 + (\sqrt{4x-1})^2} \cdot \frac{1}{2} (4x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x-1}} - \frac{2}{\sqrt{4x-1} \cdot [1 + (\sqrt{4x-1})^2]} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} - \frac{2}{\sqrt{4x-1} \cdot (1 + 4x - 1)} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4x-1}} - \frac{2}{\sqrt{4x-1} \cdot 4x} = \frac{2 \cdot 4x - 2}{4x \cdot \sqrt{4x-1}} = \frac{8x - 2}{4x \cdot \sqrt{4x-1}} = \frac{2 \cdot (4x - 1)}{4x \cdot \sqrt{4x-1}} =$$

$$= \frac{(4x-1) \cdot \sqrt{4x-1}}{2x \cdot \sqrt{4x-1} \cdot \sqrt{4x-1}} = \frac{(4x-1) \cdot \sqrt{4x-1}}{2x \cdot \sqrt{4x-1} \cdot \sqrt{4x-1}} = \frac{(4x-1) \cdot \sqrt{4x-1}}{2x \cdot (\sqrt{4x-1})^2} =$$

$$= \frac{(4x-1) \cdot \sqrt{4x-1}}{2x \cdot (4x-1)} = \frac{\sqrt{4x-1}}{2x}$$

Příklad 7.21 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x}$:

$$y = \frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{[0 - (-\sin x)] \cdot [1 + \sin x] - [(1 - \cos x) \cdot (0 + \cos x)]}{(1 + \sin x)^2}$$

$$= \frac{\sin x \cdot (1 + \sin x) - [(1 - \cos x) \cdot \cos x]}{(1 + \sin x)^2} = \frac{\sin x + \sin^2 x - (\cos x - \cos^2 x)}{(1 + \sin x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x + \sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x - \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{1 + \sin x - \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Příklad 7.22 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = x^2 \cdot \ln x$:

$$y = x^2 \cdot \ln x \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y' = 2 \cdot x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot x \cdot \ln x + x = x \cdot (2 \ln x + 1) = x \cdot (\ln x^2 + 1)$$

Příklad 7.23 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = \frac{x^2 + 4}{e^x}$:

$$y = \frac{x^2 + 4}{e^x} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(2x \cdot e^x) - [(x^2 + 4) \cdot e^x]}{(e^x)^2} = \frac{e^x \cdot (2x - x^2 - 4)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 4}{e^x}$$

Příklad 7.24 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = \ln \frac{x - 2}{(x - 3)^2}$:

$$y = \ln \frac{x-2}{(x-3)^2} \quad \text{jde o složenou funkci, přičemž } \frac{x-2}{(x-3)^2} \text{ je } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x-2}{(x-3)^2}} \cdot \frac{[1 \cdot (x-3)^2] - [(x-2) \cdot 2 \cdot (x-3) \cdot 1]}{[(x-3)^2]^2} = \frac{(x-3)^2}{x-2} \cdot \frac{(x-3)^2 - 2 \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{1}{x-2} \cdot \frac{(x-3)^2 - 2 \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{(x-3)^2} = \frac{(x-3) \cdot [(x-3) - 2 \cdot (x-2)]}{(x-2) \cdot (x-3)^2} = \frac{x-3-2x+4}{(x-2) \cdot (x-3)} =$$

$$= \frac{1-x}{(x-2) \cdot (x-3)}$$

Příklad 7.25 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$:

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{je funkce složená, přičemž } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ je } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) \right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} = \\
 &= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[-\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} \right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} = \\
 &= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[-1 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} = \\
 &= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] + \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \right]}{2 \cdot \left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} = \\
 &= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2 \cdot \left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} = \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= \frac{2}{(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= \frac{1}{(1+x) \cdot (1-x)} = \frac{1}{1-x^2} \quad (1+x) \cdot (1-x) = 1-x^2 \text{ podle } (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2
 \end{aligned}$$

Příklad 7.26 / strana 43

Určete derivaci funkce $y = e^{\sin 2x}$:

$$y = e^{\sin 2x} \quad \text{jde o složenou funkci}$$

$$y' = e^{\sin 2x} \cdot 2 \cdot \cos 2x = 2 \cdot \cos 2x \cdot e^{\sin 2x} \quad (e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2$$

Příklad 7.27 / strana 44

Určete derivaci funkce $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x}$:

$$y = \sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x} = (1 + \operatorname{tg} 2x)^{\frac{1}{2}} \quad \text{je funkce složená}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot (1 + \operatorname{tg} 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 2x} \cdot \cos^2 2x}$$

Příklad 7.28 / strana 44

Určete derivaci funkce $y = x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$:

$$y = x \cdot \sqrt{x^2 - 1} = x \cdot (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y' = 1 \cdot \sqrt{x^2 - 1} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{x^2 - 1} + x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \frac{x^2 - 1 + x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Příklad 7.30 / strana 44

Určete derivaci funkce $y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x$:

$$y = x^2 \cdot \operatorname{tg} x \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y' = 2x \cdot \operatorname{tg} x + x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2x \cdot \sin x}{\cos x} + \frac{x^2}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot x \cdot \sin x \cdot \cos x + x^2}{\cos^2 x} = \frac{x \cdot \sin 2x + x^2}{\cos^2 x}$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

Příklad 7.31 / strana 44

Určete derivaci funkce $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \operatorname{arctg} x$:

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \operatorname{arctg} x = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{arctg} x \quad \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ je funkce složená}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) \right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[-\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} \right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[(1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] - \left[-1 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\}}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] + \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \right]}{2 \cdot \left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2 \cdot \left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1-x+1+x}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1+x^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1+x^2}} = \frac{2}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1+x^2} = \\
 &= \frac{1}{(1+x) \cdot (1-x)} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2+1-x^2}{(1-x^2) \cdot (1+x^2)} = \frac{2}{1-x^4}
 \end{aligned}$$

Příklad 7.32 / strana 44

Určete derivaci funkce $y = \sin^2(\cos 3x)$:

$y = \sin^2(\cos 3x)$ je trojitě složená!!!

$y' = 2 \cdot \sin(\cos 3x) \cdot \cos(\cos 3x) \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 = (-3 \cdot \sin 3x) \cdot \sin(2 \cdot \cos 3x)$

$2 \cdot \sin(\cos 3x) \cdot \cos(\cos 3x) = \sin(2 \cdot \cos 3x)$ podle $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

Příklad 7.33 / strana 44

Určete derivaci funkce $y = \sqrt{\sin^2 x}$:

$y = \sqrt{\sin^2 x} = (\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$ je složená funkce

$y' = \frac{1}{2} \cdot (\sin^2 x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \cos x^2 \cdot 2x = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 x}} \cdot x \cdot \cos x^2 = \frac{x \cdot \cos x^2}{\sqrt{\sin^2 x}}$

Příklad 7.34 / strana 45

Určete derivaci funkce $y = \sin \sqrt{1+x^2}$:

$y = \sin \sqrt{1+x^2} = \sin(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ je funkce složená

$y' = \cos(1+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2x = \cos \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x = \frac{x \cdot \cos \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

Příklad 8.1 / strana 45

Určete první a druhou derivaci funkce $y = x^2 \cdot e^{-x}$:

$$y = x^2 \cdot e^{-x} \quad (\mathbf{u \cdot v})' = \mathbf{u' \cdot v + u \cdot v'}$$

$$y' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (2x - x^2)$$

$$y' = e^{-x} \cdot (2x - x^2) \quad (\mathbf{u \cdot v})' = \mathbf{u' \cdot v + u \cdot v'}$$

$$y' = e^{-x} \cdot (-1) \cdot (2x - x^2) + e^{-x} \cdot (2 - 2x) = e^{-x} \cdot (2 - 2x) - e^{-x} \cdot (2x - x^2) = e^{-x} \cdot (2 - 2x - 2x + x^2) = e^{-x} \cdot (x^2 - 4x + 2)$$

Příklad 8.2 / strana 45

Určete první a druhou derivaci funkce $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$:

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{je funkce složená, přičemž } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \text{ je } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)\right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[-\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]}{\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[\frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[-1 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{1}{2}}\right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\left[\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \right] + \left[(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \right]}{2 \cdot \left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} = \\
 &= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2 \cdot \left[(1-x)^{\frac{1}{2}} \right]^2} = \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{(1-x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1-x+1+x}{(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= \frac{2}{(1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= \frac{1}{(1+x) \cdot (1-x)} = \frac{1}{1-x^2} \quad (1+x) \cdot (1-x) = 1-x^2 \text{ podle } (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{1}{1-x^2} \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \\
 y' &= \frac{[0 \cdot (1-x^2)] - [1 \cdot (-2x)]}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}
 \end{aligned}$$

Příklad 8.3 / strana 45

Určete první a druhou derivaci funkce $y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}$:

$$y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1} \quad \text{je složená funkce, kde } \frac{e^x}{x^2 + 1} = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2+1}} \cdot \frac{[e^x \cdot (x^2+1)] - [e^x \cdot 2x]}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1}{e^x} \cdot \frac{e^x \cdot (x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x \cdot (x^2+1) \cdot (x^2-2x+1)}{e^x \cdot (x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{e^x \cdot (x^2+1) \cdot (x^2-2x+1)}{e^x \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$$

$x^2 - 2x + 1$ je vzorec $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$y' = \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \text{ kde } (x-1)^2 \text{ je funkce složená}$$

$$y'' = \frac{[2 \cdot (x-1) \cdot 1 \cdot (x^2+1)] - [(x-1)^2 \cdot 2x]}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot [(x^2+1) - x \cdot (x-1)]}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (x^2+1-x^2+x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2 \cdot (x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

Příklad 8.5 / strana 45

Určete první a druhou derivaci funkce $y = \arccos \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$:

$$y = \arccos \sqrt{\frac{1}{1+x^2}} = \arccos \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{jde o funkci složenou } \frac{1}{1+x^2} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \frac{[0 \cdot (1+x^2)] - 2x}{(1+x^2)^2} \right\} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}} \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{-x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \left[-\frac{x \cdot \sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2} \right] = \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2) \cdot (1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y'' = \frac{[0 \cdot (1+x^2)] - (1 \cdot 2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

Příklad 8.6 / strana 45

Určete první a druhou derivaci funkce $y = \frac{e^x}{x^2}$:

$$y = \frac{e^x}{x^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(e^x \cdot x^2) - (e^x \cdot 2x)}{(x^2)^2} = \frac{e^x \cdot x \cdot (x-2)}{x^4} = e^x \cdot \frac{(x-2)}{x^3}$$

$$y' = e^x \cdot \frac{(x-2)}{x^3} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v', \text{ přičemž } \frac{(x-2)}{x^3} \text{ podle } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y'' = e^x \cdot \frac{(x-2)}{x^3} + e^x \cdot \frac{(1 \cdot x^3) - [(x-2) \cdot 3x^2]}{(x^3)^2} = e^x \cdot \left[\frac{(x-2)}{x^3} + \frac{x^3 - 3x^2 \cdot (x-2)}{x^6} \right] =$$

$$= e^x \cdot \left[\frac{(x-2)}{x^3} + \frac{x^3 - 3x^3 + 6x^2}{x^6} \right] = e^x \cdot \frac{x^3 \cdot (x-2) + x^3 - 3x^3 + 6x^2}{x^6} =$$

$$= e^x \cdot \frac{x^4 - 2x^3 + x^3 - 3x^3 + 6x^2}{x^6} = e^x \cdot \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2}{x^6} = e^x \cdot \frac{x^2 \cdot (x^2 - 4x + 6)}{x^6} = e^x \cdot \frac{x^2 - 4x + 6}{x^4}$$

Příklad 9 / strana 45

Určete první, druhou a třetí derivaci funkce $y = x^2 \cdot e^x$:

$$y = x^2 \cdot e^x \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x \cdot (x^2 + 2x)$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$y' = e^x \cdot (x^2 + 2x) \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y'' = e^x \cdot (x^2 + 2x) + e^x \cdot (2x + 2) = e^x \cdot (x^2 + 2x + 2x + 2) = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2)$$

$$y'' = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2) \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y''' = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2) + e^x \cdot (2x + 4) = e^x \cdot (x^2 + 4x + 2 + 2x + 4) = e^x \cdot (x^2 + 6x + 6)$$

Neurčitý integrál**Příklad 1 / strana 54**

Vypočtete:

$$\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx$$

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx &= \int \frac{(1-x)^2}{x^2} dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{2x}{x^2} dx + \int \frac{x^2}{x^2} dx = \\ &= \int x^{-2} dx - 2 \int \frac{1}{x} dx + \int dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 2 \ln|x| + x + c = \frac{x^{-1}}{-1} - \ln x^2 + x + c = \\ &= x - \frac{1}{x} - \ln x^2 + c \end{aligned}$$

Příklad 2 / strana 54

Vypočtete:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx \quad \text{substituční metoda} \Rightarrow t = 1 + \sqrt{x+1} = 1 + (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dt}{dx} = 0 + \frac{1}{2} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+1}} \Rightarrow dx = 2 \cdot \sqrt{x+1} dt \quad \text{dosadíme za } t \text{ a za } dx$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{2 \cdot \sqrt{x+1}}{t} dt \quad 1 + \sqrt{x+1} = t \Rightarrow \sqrt{x+1} = t-1 \quad \text{pro dvojnásobek platí}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \sqrt{x+1} = 2 \cdot (t-1) \quad \text{místo } 2 \cdot \sqrt{x+1} \text{ dosadíme } 2 \cdot (t-1)$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{2 \cdot \sqrt{x+1}}{t} dt = \int \frac{2 \cdot (t-1)}{t} dt = \int \frac{2t-2}{t} dt = \int \frac{2t}{t} dt - \int \frac{2}{t} dt =$$

$$= 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t} dt = 2 \cdot t - 2 \cdot \ln|t| + c = 2 \cdot (1 + \sqrt{x+1}) - \ln|1 + \sqrt{x+1}|^2 + c$$

Příklad 3 / strana 55

Vypočtete:

$$\int 2x \cdot e^{x^2} dx \quad \text{volíme metodu substituční}$$

$$\int 2x \cdot e^{x^2} dx \Rightarrow \text{za exponent } x^2 \text{ dosadíme } t \quad t = x^2$$

$$t = x^2 \quad \text{zderivujeme } t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x} \quad \text{dosadíme výrazu}$$

$$\int 2x \cdot e^t \frac{dt}{2x} = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$$

Příklad 4 / strana 55

Vypočtete:

$$\int x \cdot e^x dx \quad \text{jde o součin} \Rightarrow \text{počítáme pomocí metody per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = e^x \quad u = e^x \quad v = x \quad v' = 1$$

$$\int x \cdot e^x dx = e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \cdot dx = (e^x \cdot x - e^x) + c = e^x \cdot (x - 1) + c$$

Příklad 5 / strana 55

Vypočtete:

$$\int x^2 \cdot e^x dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = e^x \quad u = e^x \quad v = x^2 \quad v' = 2x$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int e^x \cdot x dx =$$

$$\text{opět metoda per partes} \Rightarrow u' = e^x \quad u = e^x \quad v = x \quad v' = 1$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \cdot dx) =$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (e^x \cdot x - e^x) + c = x^2 \cdot e^x - 2e^x \cdot x + 2e^x + c =$$

$$= e^x \cdot (x^2 - 2x + 2) + c$$

Příklad 6 / strana 55

Vypočtete:

$$\int 2x \cdot \sin x dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = 2x \quad v' = 2$$

$$\int 2x \cdot \sin x dx = -\cos x \cdot 2x - \int -2 \cdot \cos x dx = -2x \cdot \cos x + 2 \int \cos x dx =$$

$$= -2x \cdot \cos x + 2 \cdot \sin x + c$$

Příklad 7 / strana 55

Vypočtete:

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = x^2 \quad v' = 2x$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sin x \, dx &= -\cos x \cdot x^2 - \int -\cos x \cdot 2x \, dx = -\cos x \cdot x^2 - \int -2x \cdot \cos x \, dx = \\ &= -\cos x \cdot x^2 + 2 \int x \cdot \cos x \, dx = \text{opět per partes} \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = x \quad v' = 1 \\ &= -\cos x \cdot x^2 + 2 \cdot \left(\sin x \cdot x - \int \sin x \cdot 1 \cdot dx \right) = -\cos x \cdot x^2 + 2 \cdot (\sin x \cdot x + \cos x) + c = \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x + c \end{aligned}$$

Příklad 8 / strana 55

Vypočtete:

$$\int x \cdot \cos x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = x \quad v' = 1$$

$$\int x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot x - \int \sin x \cdot 1 \cdot dx = \sin x \cdot x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + c$$

Příklad 9 / strana 55

Vypočtete:

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = x^2 \quad v' = 2x$$

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot x^2 - \int \sin x \cdot 2x \, dx = \sin x \cdot x^2 - 2 \int \sin x \cdot x \, dx =$$

$$\text{opět per partes} \quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = x \quad v' = 1$$

$$= \sin x \cdot x^2 - 2 \int \sin x \cdot x \, dx = \sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x - \int -\cos x \cdot 1 \cdot dx \right) =$$

$$= \sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x + \int \cos x \, dx \right) = \sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x + \sin x \right) + c =$$

$$= x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + c$$

Příklad 10 / strana 56

Vypočtete:

$$\int x \cdot e^{2x} dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = e^{2x} \quad u = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \quad v = x \quad v' = 1$$

$$\int e^{2x} = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \Rightarrow \text{odvozeno ze substituční metody } t = 2x \quad \frac{dt}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int e^t \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot e^t = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \quad \text{obecně tedy platí} \quad \int e^{k \cdot x} = \frac{1}{k} \cdot e^{k \cdot x}$$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + c = \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + c \end{aligned}$$

Příklad 11 / strana 56

Vypočtete:

$$\int \sin x \cdot \cos x dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = \sin x \quad v' = \cos x$$

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \sin x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot \cos x dx \quad /+ \int \sin x \cdot \cos x dx$$

$$2 \int \sin x \cdot \cos x dx = \sin x \cdot \sin x + c \quad /2$$

$$\int \sin x \cdot \cos x dx = \frac{\sin x \cdot \sin x}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

Příklad 12 / strana 56

Vypočtete:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad u = \operatorname{tg} x \quad v = \sin^2 x \quad v' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x dx = \operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x - 2 \int \sin^2 x dx =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin^2 x - 2 \int \sin x \cdot \sin x dx = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2 \int \sin x \cdot \sin x dx \quad \text{znovu per partes}$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = \sin x \quad v' = \cos x$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x - \int -\cos x \cdot \cos x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx \quad / + \int \sin^2 x \, dx \quad \text{dostáváme rovnici}$$

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + x \quad / : 2$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{-\cos x \cdot \sin x + x}{2} \quad \text{za } \int \sin^2 x \, dx \text{ dosadíme do předchozí rovnice}$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx = \operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x - 2 \int \sin^2 x \, dx =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2 \int \sin x \cdot \sin x \, dx = \frac{\sin^3 x}{\cos x} - 2 \cdot \frac{-\cos x \cdot \sin x + x}{2} + c = \frac{\sin^3 x}{\cos x} + \cos x \cdot \sin x - x + c =$$

$$= \frac{\sin^3 x + \cos x \cdot \cos x \cdot \sin x}{\cos x} - x + c = \frac{\sin^3 x + \cos^2 x \cdot \sin x}{\cos x} - x + c =$$

$$= \frac{\sin x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos x} - x + c = \operatorname{tg} x \cdot 1 - x + c = \operatorname{tg} x - x + c$$

$$\frac{\sin x}{\cos} = \operatorname{tg} x \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Příklad 13 / strana 56

Vypočtete:

$$\int \cos^3 x \, dx$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos^2 x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = \cos^2 x \quad v' = 2 \cos x \cdot (-\sin x)$$

$$\int \cos x \cdot \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos^2 x - \int \sin x \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x - \int \sin x \cdot 2 \cos x \cdot (-\sin x) \, dx = \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x \cdot (1 - \cos^2 x) \, dx = \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int (\cos x - \cos^3 x) \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \int \cos x \, dx - 2 \int \cos^3 x \, dx = \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \sin x - 2 \int \cos^3 x \, dx$$

$$3 \int \cos^3 x \, dx = \sin x \cdot \cos^2 x + 2 \sin x + c = \sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + c = \sin x - \sin^3 x + 2 \sin x + c$$

$$3 \int \cos^3 x \, dx = 3 \sin x - \sin^3 x + c \quad / : 3 \quad \Rightarrow \quad \int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$$

Příklad 14 / strana 56

Vypočtete:

$$\int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = \sin x \quad v' = \cos x$$

$$\int \sin x \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot \sin x - \int -\cos x \cdot \cos x \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int \cos^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx =$$

$$= -\cos x \cdot \sin x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx$$

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\cos x \cdot \sin x + \int dx \quad /:2 \Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \cdot \sin x) + c$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Příklad 15 / strana 56

Vypočtete:

$$\int \cos^2 x \, dx$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = \cos x \quad v' = -\sin x$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot (-\sin x) \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx =$$

$$= \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int dx - \int \cos^2 x \, dx \quad /+ \int \cos^2 x \, dx$$

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int dx \quad /:2 \Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cdot (x + \sin x \cdot \cos x) + c$$

Příklad 16 / strana 57

Vypočtete:

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx \quad \text{exponent obsahuje goniometrickou funkci} \Rightarrow \text{substituční metoda}$$

$$\sin x = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x} \quad \text{za } dx \text{ dosadíme do výrazu}$$

$$\int e^t \cdot \cos x \frac{dt}{\cos x} = \int e^t dt = e^t + c = e^{\sin x} + c$$

Příklad 17 / strana 57

Vypočtete:

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = x^2 \quad v' = 2x$$

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot x^2 - \int \sin x \cdot 2x \, dx = \sin x \cdot x^2 - 2 \int \sin x \cdot x \, dx$$

$$\text{opět per partes} \quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = x \quad v' = 1$$

$$\int x^2 \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x - \int -\cos x \cdot 1 \, dx \right) =$$

$$= \sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x + \int \cos x \, dx \right) = \left[\sin x \cdot x^2 - 2 \cdot \left(-\cos x \cdot x + \sin x \right) \right] + c =$$

$$= \sin x \cdot x^2 + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + c$$

Příklad 18 / strana 57

Vypočtete:

$$\int \sin \sqrt{x} \, dx \quad \text{řešíme substituční metodou}$$

$$t = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{dt}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{dt}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = dt \cdot 2\sqrt{x}$$

$$dx = dt \cdot 2\sqrt{x} \quad \text{z předchozího víme, že } \sqrt{x} = t \Rightarrow dx = dt \cdot 2t$$

$$\int \sin \sqrt{x} \, dx = \int \sin t \cdot 2t \, dt = 2 \int t \cdot \sin t \, dt = \quad \text{řešíme metodou per partes}$$

$$u' = \sin t \quad u = -\cos t \quad v = t \quad v' = 1$$

$$= 2 \cdot \left(-\cos t \cdot t - \int -\cos t \cdot 1 \, dt \right) = 2 \cdot \left(-\cos t \cdot t + \int \cos t \, dt \right) = 2 \cdot \left(-\cos t \cdot t + \sin t \right) + c =$$

$$= 2 \cdot \left(\sin \sqrt{x} - \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x} \right) + c$$

Příklad 19 / strana 57

Vypočtete:

$$\int \sin x \cdot \sqrt{\cos x} \, dx = \int \sin x \cdot (\cos x)^{\frac{1}{2}} \, dx \quad \text{řešíme substituční metodou}$$

$$t = (\cos x)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \cdot (\cos x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\sin x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{-\frac{1}{2} \cdot (\cos x)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin x} =$$

$$= \frac{dt}{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(\cos x)^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin x} = -\frac{dt}{\frac{\sin x}{2 \cdot \sqrt{\cos x}}} = -\frac{2 \cdot \sqrt{\cos x} dt}{\sin x} = -\frac{2 \cdot t dt}{\sin x} \quad \text{dosadíme do výrazu}$$

$$\int \sin x \cdot \sqrt{\cos x} dx = \int \sin x \cdot t \cdot \left(-\frac{2 \cdot t}{\sin x} \right) dt = -2 \int t \cdot t dt = -2 \int t^2 dt = -2 \frac{t^3}{3} + c =$$

$$= -\frac{2}{3} t^3 + c = -\frac{2}{3} \cdot \left[(\cos x)^{\frac{1}{2}} \right]^3 + c = -\frac{2}{3} \cdot (\cos x)^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{2}{2} \cdot \sqrt{\cos^3 x} + c$$

Příklad 20 / strana 57

Vypočtete:

$$\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx$$

$$\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx = \int \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^3} dx = \int \frac{x^4}{x^3} dx + \int \frac{2x^2}{x^3} dx + \int \frac{1}{x^3} dx =$$

$$= \int x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-3} dx = x^2 + 2 \ln|x| + \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{x^2}{2} + \ln x^2 - \frac{1}{2x^2} + c$$

Příklad 21 / strana 57

Vypočtete:

$$\int e^x \cdot \cos x dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = e^x \quad u = e^x \quad v = \cos x \quad v' = -\sin x$$

$$= e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) dx = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x dx \quad \text{opět per partes}$$

$$u' = e^x \quad u = e^x \quad v = \sin x \quad v' = \cos x$$

$$= e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx \quad /+ \int e^x \cdot \cos x dx \quad \text{dostáváme výraz}$$

$$2 \int e^x \cdot \cos x dx = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x + c = e^x \cdot (\sin x + \cos x) + c \quad /:2$$

$$\int e^x \cdot \cos x dx = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x + \cos x) + c$$

Příklad 22 / strana 57

Vypočtete:

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = e^x \quad v' = e^x$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot e^x - \int -\cos x \cdot e^x \, dx = -\cos x \cdot e^x + \int \cos x \cdot e^x \, dx = \text{opět per partes}$$

$$u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = e^x \quad v' = e^x$$

$$= -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x \, dx \quad /+ \int \sin x \cdot e^x \, dx \quad \text{dostáváme výraz}$$

$$2 \int e^x \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x + c = e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c \quad /:2$$

$$\int e^x \cdot \sin x \, dx = -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x + c = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x) + c$$

Příklad 23 / strana 57

Vypočtete:

$$\int \frac{dx}{2x+5} \quad \text{řešíme metodou substituční}$$

$$t = 2x + 5 \quad \frac{dt}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2} \quad \text{dosadíme}$$

$$\int \frac{dx}{2x+5} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln t + c = \frac{1}{2} \ln |2x+5| + c = \ln |2x+5|^{\frac{1}{2}} + c = \ln \sqrt{|2x+5|} + c$$

Příklad 24 / strana 58

Vypočtete:

$$\int x \cdot \ln^2 x \, dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = x \quad u = \frac{x^2}{2} \quad v = \ln^2 x \quad v' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int x \cdot \ln^2 x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x \cdot \ln x \, dx = \text{opět per partes}$$

$$u' = x \quad u = \frac{x^2}{2} \quad v = \ln x \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right) + c$$

Příklad 25 / strana 58

Vypočtěte:

$$\int \frac{x^2}{1-x^3} dx \quad \text{řešíme pomocí substituční metody}$$

$$t = 1 - x^3 \quad \frac{dt}{dx} = -3x^2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{-3x^2} \quad \text{dosadíme do výrazu}$$

$$\int \frac{x^2}{t} \cdot \frac{dt}{-3x^2} = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{3} \ln t + c = -\frac{1}{3} \ln |1 - x^3| + c$$

Příklad 26 / strana 58

Vypočtěte:

$$\int \sin(3x - 5) dx \quad \text{řešíme metodou substituční}$$

$$t = 3x - 5 \quad \frac{dt}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{3} \quad \text{dosadíme do výrazu}$$

$$\begin{aligned} \int \sin(3x - 5) dx &= \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \sin t dt = \frac{1}{3} \cdot (-\cos t) + c = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \cos t + c = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x - 5) + c \end{aligned}$$

Příklad 27 / strana 58

Vypočtěte:

$$\int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad u = \operatorname{tg} x \quad v = \sin x \quad v' = \cos x$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx &= \operatorname{tg} x \cdot \sin x - \int \operatorname{tg} x \cdot \cos x dx = \operatorname{tg} x \cdot \sin x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x dx = \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \sin x - \int \sin x dx = \frac{\sin^2 x}{\cos x} - (-\cos x) + c = \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x + c = \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos x \cdot \cos x}{\cos x} + c = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} + c = \frac{1}{\cos x} + c \end{aligned}$$

Příklad 28 / strana 58

Vypočtete:

$$\int \frac{2x+7}{x^2-x-2} dx \quad \text{řešíme pomocí parciálních zlomků}$$

Nejprve vypočítáme kořeny kvadratické rovnice:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \langle_{-1}^2 \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -1 \Rightarrow \overbrace{(x-2)}^A \cdot \overbrace{(x+1)}^B$$

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A \cdot (x+1) + B \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x+1)} = \frac{Ax + A + Bx - 2B}{(x-2) \cdot (x+1)} = \frac{Ax + Bx + A - 2B}{(x-2) \cdot (x+1)} =$$

$$= \frac{x \cdot (A+B) + A - 2B}{(x-2) \cdot (x+1)} \Rightarrow \frac{2x+7}{x^2-x-2}$$

$$A+B=2 \quad \text{řešíme soustavu rovnic} \Rightarrow B=2-A \quad \text{dosadíme do 2. rovnice}$$

$$\underline{A-2B=7} \quad A-2 \cdot (2-A)=7 \quad A-4+2A=7 \quad 3A=11 \Rightarrow A = \frac{11}{3}$$

$$B=2-A \quad \text{dosadíme za A:} \quad B=2-\frac{11}{3} = -\frac{5}{3} \quad \text{za A a B dosadíme a zintegrujeme}$$

$$\int \frac{2x+7}{x^2-x-2} dx = \int \frac{A}{(x-2)} dx + \int \frac{B}{(x+1)} dx = \int \frac{\frac{11}{3}}{(x-2)} dx + \int \frac{-\frac{5}{3}}{(x+1)} dx =$$

$$= \frac{11}{3} \int \frac{1}{(x-2)} dx - \frac{5}{3} \int \frac{1}{(x+1)} dx = \frac{11}{3} \cdot \ln|x-2| - \frac{5}{3} \cdot \ln|x+1| + c$$

Příklad 29 / strana 58

Vypočtete:

$$\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) dx$$

$$\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \quad \text{2x subst. metoda}$$

$$v \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \text{ nahradíme } a = \cos x \quad a \quad v \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \text{ nahradíme } b = \sin x$$

$$\frac{da}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{da}{-\sin x} \quad \frac{db}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{db}{\cos x}$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\begin{aligned} &= \int \frac{\sin x}{a} \cdot \frac{da}{-\sin x} + \int \frac{\cos x}{b} \cdot \frac{db}{\cos x} = -\int \frac{1}{a} da + \int \frac{1}{b} db = -\ln|a| + \ln|b| + c = \\ &= \ln|b| - \ln|a| + c = \ln|\sin x| - \ln|\cos x| + c = \ln \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right| + c = \ln|\operatorname{tg} x| + c \end{aligned}$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \ln|\sin x| - \ln|\cos x| = \ln \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right|$$

Příklad 30 / strana 58

Vypočtete:

$$\begin{aligned} &\int \frac{x}{\sin^2 x} dx \\ &\int \frac{x}{\sin^2 x} dx = \int x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = \text{řešíme metodou per partes} \\ &\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \frac{1}{\sin^2 x} \quad u = -\operatorname{cotg} x \quad v = x \quad v' = 1 \\ &= \int x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x \cdot x - \int -\operatorname{cotg} x \cdot 1 \cdot dx = -\operatorname{cotg} x \cdot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \\ &\text{subst. metoda } t = \sin x \quad \frac{dt}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x} \\ &= -\operatorname{cotg} x \cdot x + \int \frac{\cos x}{t} \cdot \frac{dt}{\cos x} = -\operatorname{cotg} x \cdot x + \int \frac{1}{t} dt = -\operatorname{cotg} x \cdot x + \ln|t| + c = \\ &= \ln|\sin x| - \operatorname{cotg} x \cdot x + c \end{aligned}$$

Příklad 31 / strana 59

Vypočtete:

$$\begin{aligned} &\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \\ &\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad \text{řešíme metodou per partes} \\ &\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad u = \operatorname{tg} x \quad v = x \quad v' = 1 \\ &\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x \cdot x - \int \operatorname{tg} x \cdot 1 dx = \operatorname{tg} x \cdot x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \\ &\text{substituční metoda } t = \cos x \quad \frac{dt}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{dt}{-\sin x} \end{aligned}$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\begin{aligned} &= \operatorname{tg} x \cdot x - \int \frac{\sin x}{t} \cdot \frac{dt}{-\sin x} = \operatorname{tg} x \cdot x + \int \frac{1}{t} dt = \operatorname{tg} x \cdot x + \ln|t| + c = \\ &= \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + c \end{aligned}$$

Příklad 32 / strana 59

Vypočtete:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{řešíme substituční metodou}$$

$$t = 1 - x^2 \quad \frac{dt}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{dt}{-2x}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} + c = -\sqrt{t} + c = -\sqrt{1-x^2} + c \end{aligned}$$

Příklad 33 / strana 59

Vypočtete:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{řešíme substituční metodou}$$

$$t = 1 + x^2 \quad \frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{t} + c = \sqrt{1+x^2} + c \end{aligned}$$

Příklad 34 / strana 59

Vypočtete:

$$\int t \cdot e^{t^2} dt \quad \text{řešíme metodou substituční}$$

$$x = t^2 \quad \frac{dx}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{dx}{2t}$$

$$\int t \cdot e^x \frac{dx}{2t} = \frac{1}{2} \int e^x dx = \frac{1}{2} e^x = \frac{e^{t^2}}{2} + c$$

Příklad 35 / strana 59

Vypočtete:

$$\int x \cdot \ln^2 x dx \quad \text{jde o součin, řešíme metodou per partes}$$

$$\int u'v = uv - \int u \cdot v' \quad u' = x \quad u = \frac{x^2}{2} \quad v = \ln^2 x \quad v' = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\int x \cdot \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x \cdot \ln x dx = \text{opět per partes}$$

$$u' = x \quad u = \frac{x^2}{2} \quad v = \ln x \quad v' = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \int x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right) + c$$

Příklad 36 / strana 59

Vypočtete:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx \quad \text{řešíme pomocí parciálních zlomků}$$

$$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1) \quad \text{podle } a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

$$\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} = \frac{A \cdot (x - 1) + B \cdot (x + 1)}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{Ax - A + Bx + B}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{Ax + Bx - A + B}{(x + 1) \cdot (x - 1)} =$$

$$= \frac{x \cdot (A + B) + B - A}{(x + 1) \cdot (x - 1)} \quad \text{dostáváme soustavu rovnic}$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B \quad \text{dosadíme do 2. rovnice}$$

$$\underline{B - A = 1} \quad \text{po dosazení dostáváme: } B + B = 1 \quad 2B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}; \quad A = -B \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 1} &= \int \frac{A}{x+1} dx + \int \frac{B}{x-1} dx = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c = \ln|x-1|^{\frac{1}{2}} - \ln|x+1|^{\frac{1}{2}} + c = \\ &= \ln \sqrt{|x-1|} - \ln \sqrt{|x+1|} + c = \ln \frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}} + c = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c \end{aligned}$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \ln \sqrt{|x-1|} - \ln \sqrt{|x+1|} = \ln \frac{\sqrt{|x-1|}}{\sqrt{|x+1|}}$$

Příklad 37 / strana 59

Vypočtete:

$$\int \frac{5}{x^2 + x - 6} dx \quad \text{řešíme pomocí parciálních zlomků}$$

Nejprve vypočítáme kořeny kvadratické rovnice $x^2 + x - 6$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -6}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm 5}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow x_1 = 2 \quad x_2 = -3 \Rightarrow \overbrace{(x-2)}^A \cdot \overbrace{(x+3)}^B$$

$$\frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)} = \frac{A \cdot (x+3) + B \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x+3)} = \frac{Ax + 3A + Bx - 2B}{(x-2) \cdot (x+3)} = \frac{Ax + Bx + 3A - 2B}{(x-2) \cdot (x+3)} =$$

$$= \frac{x \cdot (A+B) + 3A - 2B}{(x-2) \cdot (x+3)} \quad \text{dostáváme soustavu rovnic:}$$

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B \quad \text{dosadíme do 2. rovnice}$$

$$\underline{3A - 2B = 5} \quad \text{po dosazení dostáváme: } -3B - 2B = 5 \quad -5B = 5 \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$\text{za } B \text{ dosadíme do 1. rovnice: } A = -B \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

$$\int \frac{5}{x^2 + x - 6} dx = \int \frac{A}{(x-2)} dx + \int \frac{B}{(x+3)} dx = \int \frac{1}{(x-2)} dx + \int \frac{-1}{(x+3)} dx =$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$= \int \frac{1}{(x-2)} dx - \int \frac{1}{(x+3)} dx = \ln|x-2| - \ln|x+3| + c = \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + c$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \ln|x-2| - \ln|x+3| = \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right|$$

Příklad 39 / strana 60

Vypočtete:

$$\int \frac{2}{x^2 - 3x + 2} dx \quad \text{řešíme pomocí parciálních zlomků}$$

Nejprve zjistíme kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 3x + 2$:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm 1}{2} = \langle 2 \rangle \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \overbrace{(x-2)}^A \cdot \overbrace{(x-1)}^B$$

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} = \frac{A \cdot (x-1) + B \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot (x-1)} = \frac{Ax - A + Bx - 2B}{(x-2) \cdot (x-1)} = \frac{Ax + Bx - A - 2B}{(x-2) \cdot (x-1)} =$$

$$= \frac{x \cdot (A+B) - A - 2B}{(x-2) \cdot (x-1)} \quad \text{dostáváme soustavu rovnic:}$$

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B \quad \text{za } A \text{ dosadíme do 2. rovnice}$$

$$-A - 2B = 2 \quad \text{po dosazení: } B - 2B = 2 \quad -B = 2 \quad \Rightarrow \quad B = -2$$

$$\text{do 1. rovnice dosadíme za } B: \quad A = -B \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

$$\int \frac{2}{x^2 - 3x + 2} dx = \int \frac{A}{x-2} dx + \int \frac{B}{x-1} dx = \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{-2}{x-1} dx = 2 \int \frac{1}{x-2} dx - 2 \int \frac{1}{x-1} dx =$$

$$= 2 \ln|x-2| - 2 \ln|x-1| + c = \ln|x-2|^2 - \ln|x-1|^2 + c = \ln \left| \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} \right| + c = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|^2 + c$$

Příklad 40 / strana 60

Vypočtete:

$$\int \frac{3-2x}{x^2-5x+6} dx \quad \text{řešíme pomocí parciálních zlomků}$$

Nejprve vypočítáme kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 5x + 6$:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$= \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 3; \quad x_2 = 2 \Rightarrow \overbrace{(x-3)}^A \cdot \overbrace{(x-2)}^B$$

$$\frac{A}{(x-3)} \cdot \frac{B}{(x-2)} = \frac{A \cdot (x-2) + B \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x-2)} = \frac{Ax - 2A + Bx - 3B}{(x-3) \cdot (x-2)} = \frac{Ax + Bx - 2A - 3B}{(x-3) \cdot (x-2)} =$$

$$= \frac{x \cdot (A+B) - 2A - 3B}{(x-3) \cdot (x-2)} \quad \text{dostáváme soustavu rovnic:}$$

$$A + B = -2 \Rightarrow A = -2 - B \quad \text{dosadíme do 2. rovnice}$$

$$\underline{-2A - 3B = 3} \quad \text{po dosazení } -2 \cdot (-2 - B) - 3B = 3 \quad 4 + 2B - 3B = 3 \Rightarrow B = 1$$

$$A + B = -2 \quad \text{za B dosadíme: } A + 1 = -2 \Rightarrow A = -3$$

$$\int \frac{3-2x}{x^2-5x+6} dx = \int \frac{A}{(x-3)} dx + \int \frac{B}{(x-2)} dx = \int \frac{-3}{(x-3)} dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx =$$

$$= -3 \int \frac{1}{(x-3)} dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx = -3 \ln|x-3| + \ln|x-2| + c = \ln|x-2| - \ln|x-3|^3 + c =$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{(x-3)^3} \right| + c$$

$$k \cdot \ln x = \ln x^k \Rightarrow 3 \ln|x-3| = \ln|x-3|^3$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \Rightarrow \ln|x-2| - \ln|x-3|^3 = \ln \left| \frac{x-2}{(x-3)^3} \right|$$

Určitý integrál**Příklad 1 / strana 64**

Vypočtěte:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 + 1) dx &= \int_{-1}^1 x^3 dx - \int_{-1}^1 3x^2 dx + \int_{-1}^1 1 dx = \int_{-1}^1 x^3 dx - 3 \int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 dx = \\ &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 - 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + [x]_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - 3 \cdot \frac{1^3}{3} + 1^1 - \left(\frac{(-1)^4}{4} - 3 \cdot \frac{(-1)^3}{3} + (-1)^1 \right) = \\ &= \frac{1}{4} - 1 + 1 - \left(\frac{1}{4} + 1 - 1 \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Příklad 2 / strana 64

Vypočtěte:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x dx \\ \int_0^{\pi} \sin x dx &= [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = \mathbf{2} \end{aligned}$$

Příklad 3 / strana 64

Vypočtěte:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx \quad \text{řešíme metodou per partes} \\ \int_a^b u' \cdot v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v' \quad u' = \cos x \quad u = \sin x \quad v = x \quad v' = 1 \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx = [\sin x \cdot x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot 1 dx = [\sin x \cdot x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ = [\sin x \cdot x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - [\sin(0) \cdot 0 + \cos(0)] = \\ = 1 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 - [1 \cdot 0 + 1] = \frac{\pi}{2} - \mathbf{1} \end{aligned}$$

Příklad 4 / strana 65

Vypočtete:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx \quad \text{řešíme metodou per partes}$$

$$\int_a^b u' \cdot v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v' \quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = \cos^2 x \quad v' = -2 \cdot \cos x \cdot \sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = [-\cos x \cdot \cos^2 x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \cdot (-2 \cdot \cos x \cdot \sin x) \, dx =$$

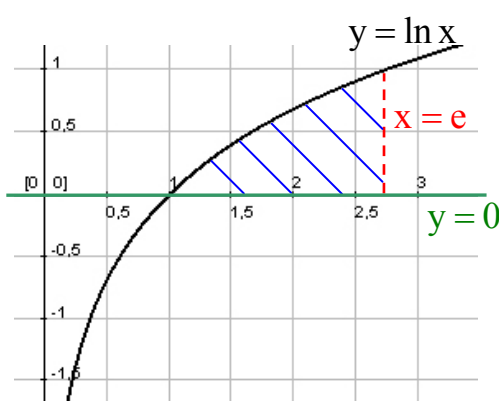
$$= [-\cos^3 x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx \quad /+ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$$

$$3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = [-\cos^3 x]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad /: 3$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = \frac{[-\cos^3 x]_0^{\frac{\pi}{2}}}{3} = \frac{-\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - [-\cos^3(0)]}{3} = \frac{0 - [-1]}{3} = \frac{1}{3}$$

Příklad 5 / strana 65

Vypočtete obsah obrazce vymezeného křivkami $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$.



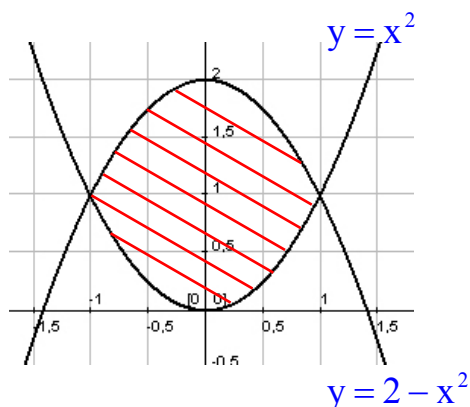
Z obrázku jsou patrné meze **1** a **e**,

$$S = \int_1^e \ln x \, dx = \int_1^e 1 \cdot \ln x \, dx = \text{použijeme metodu per partes}$$

$$= [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx = [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e dx = [x \cdot \ln x]_1^e - [x]_1^e = [e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1] - [e - 1] = e \cdot 1 - 0 - e + 1 = 1$$

Příklad 6 / strana 65

Vypočítejte obsah obrazce vymezeného křivkami $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.



Zjistíme meze tak, že porovnáme obě rovnice:

$$y = y \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \quad 2x^2 = 2 \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 y - y \, dx = \int_{-1}^1 y \, dx - \int_{-1}^1 y \, dx = \int_{-1}^1 x^2 \, dx - \int_{-1}^1 2 - x^2 \, dx =$$

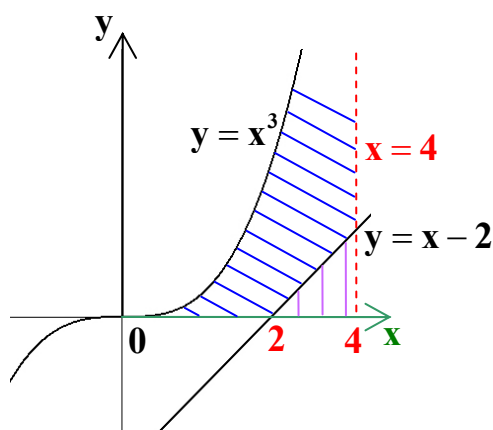
$$= \int_{-1}^1 x^2 \, dx - \left(\int_{-1}^1 2 \, dx - \int_{-1}^1 x^2 \, dx \right) = \int_{-1}^1 x^2 \, dx - \int_{-1}^1 2 \, dx + \int_{-1}^1 x^2 \, dx =$$

$$= 2 \int_{-1}^1 x^2 \, dx - 2 \int_{-1}^1 dx = 2 \cdot \left\{ \int_{-1}^1 x^2 \, dx - \int_{-1}^1 dx \right\} = 2 \cdot \left\{ \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 - [x]_{-1}^1 \right\} =$$

$$= 2 \cdot \left\{ \left[\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right] - [1 - (-1)] \right\} = 2 \cdot \left\{ \left[\frac{1}{3} - \frac{-1}{3} \right] - 2 \right\} = 2 \cdot \left\{ \frac{2}{3} - 2 \right\} = 2 \cdot \frac{2 - 3 \cdot 2}{3} =$$

$$2 \cdot \frac{2 - 6}{3} = 2 \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) = -\frac{8}{3} = \left| -2 \frac{2}{3} \right| = 2 \frac{2}{3} \text{ j.o.}$$

Příklad 7 / strana 65



Vypočítejte obsah obrazce vymezeného křivkami

$$y = x^3, \quad y = x - 2, \quad x = 4 \text{ a osou } x.$$

Musíme vypočítat plochu S , která je vyšrafovaná modře. Nejprve vypočteme celkovou plochu S_1 pod křivkou x^3 v mezích od 0 do 4 a od ní odečteme plochu S_2 pod přímkou $x-2$ v mezích od 2 do 4 , která je vyšrafovaná fialově.

$$S_1 = \int_0^4 x^3 \, dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{256}{4} - 0 = 64 \text{ j.o.}$$

$$S_2 = \int_2^4 x - 2 \, dx = \int_2^4 x \, dx - \int_2^4 2 \, dx = \int_2^4 x \, dx - 2 \int_2^4 dx =$$

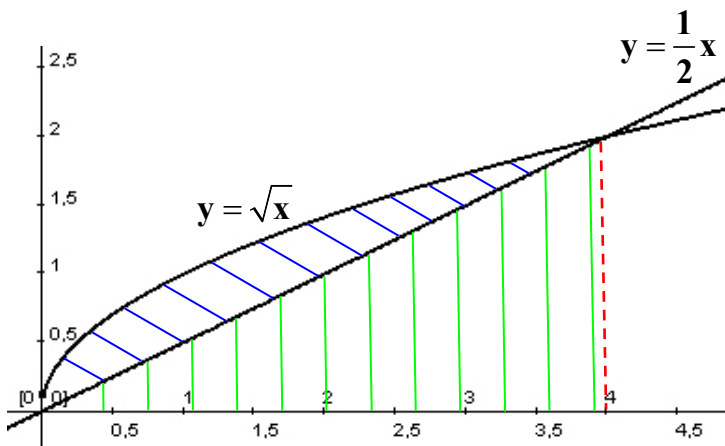
Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 - 2 \cdot [x]_2^4 = \left(\frac{4^2}{2} - \frac{2^2}{2} \right) - 2 \cdot (4 - 2) = (8 - 2) - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = \mathbf{2 \text{ j.o.}}$$

$$S = S_1 - S_2 = 64 - 2 = \mathbf{62 \text{ j.o.}}$$

Příklad 8 / strana 65

Vypočítejte obsah obrazce vymezeného křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}x$.



Nejprve si musíme vypočítat meze:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \frac{1}{2}x & x &= \left(\frac{1}{2}x \right)^2 \\ x &= \frac{1}{4}x^2 & x &= \frac{x^2}{4} \\ 4x &= x^2 & x^2 - 4x &= 0 \\ x \cdot (x - 4) &= 0 & \Rightarrow & \mathbf{x = 0, \quad x = 4} \end{aligned}$$

Musíme vypočítat plochu S vymezenou křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}x$, která je vyšrafovaná modře. Tu vypočteme tak, že od celé plochy S_1 pod křivkou $y = \sqrt{x}$ v mezích od 0 do 4 odečteme plochu S_2 pod křivkou $y = \frac{1}{2}x$ v mezích od 0 do 4 .

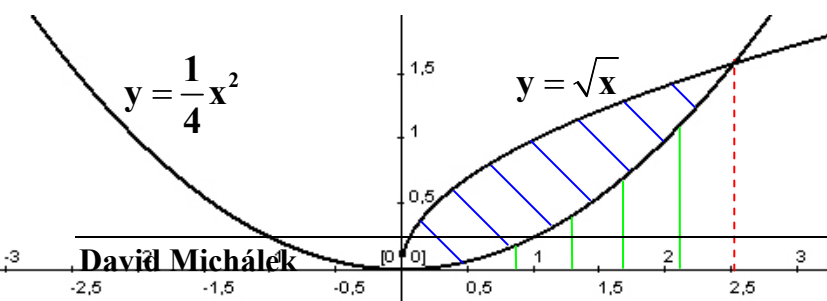
$$S_1 = \int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \right]_0^4 = \frac{2}{3} \sqrt{4^3} - \frac{2}{3} \sqrt{0^3} = \mathbf{\frac{16}{3} \text{ j.o.}}$$

$$S_2 = \int_0^4 \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 8 = \mathbf{4 \text{ j.o.}}$$

$$S = S_1 - S_2 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{16 - 12}{3} = \frac{4}{3} = \mathbf{1 \frac{1}{3} \text{ j.o.}}$$

Příklad 9 / strana 65

Vypočítejte obsah obrazce vymezeného křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{4}x^2$.



Nejprve zjistíme meze:

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\sqrt{x} = \frac{1}{4}x^2 \quad /: \sqrt{x} \quad / \cdot 4$$

$$4 = \frac{x^2}{\sqrt{x}} \quad 4 = \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$4 = x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad 4 = x^{2-\frac{1}{2}} \quad 4 = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$$

Musíme vypočítat plochu S vymezenou křivkami $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{4}x^2$, která je vyšrafovaná modře. Tu vypočteme tak, že od celé plochy S_1 pod křivkou v mezích od 0 do $\sqrt[3]{16}$ musíme odečíst plochu S_2 pod křivkou $y = \frac{1}{4}x^2$, která je vyšrafovaná zeleně.

$$S_1 = \int_0^{\sqrt[3]{16}} x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt[3]{16}} = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^{\sqrt[3]{16}} = \left[\frac{2 \cdot \sqrt[3]{16}}{3} \right]_0^{\sqrt[3]{16}} = \frac{2 \cdot (\sqrt[3]{16})^{\frac{3}{2}}}{3} - 0 = \frac{2 \cdot 16^{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 2}}}{3} =$$

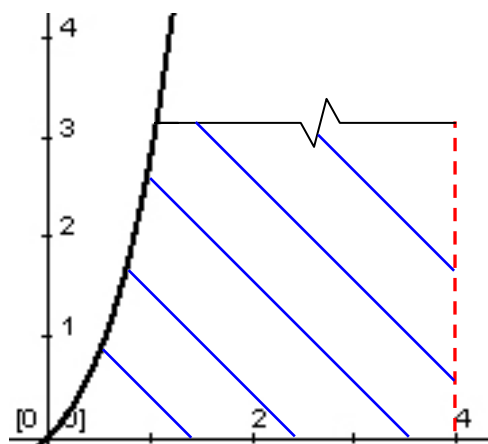
$$= \frac{2 \cdot 16^{\frac{1}{2}}}{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{16}}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3} \text{ j.o.}$$

$$S_2 = \int_0^{\sqrt[3]{16}} \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt[3]{16}} x^2 dx = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(\sqrt[3]{16})^3}{3} - 0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{16^{\frac{1 \cdot 3}{3}}}{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \text{ j.o.}$$

$$S = S_1 - S_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3} \text{ j.o.}$$

Příklad 10 / strana 65

Vypočtete obsah obrazce vymezeného křivkami $y = 0$, $y = x \cdot e^x$, pro $x \in (0; 4)$.



$$= 4 \cdot e^4 - e^4 + 1 = 3e^4 + 1$$

$$x \in (0; 4) \Rightarrow \text{meze} \begin{cases} 4 \\ 0 \end{cases}$$

$$S = \int_0^4 x \cdot e^x dx \quad \text{metoda per partes} \quad \int_a^b u' \cdot v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v'$$

$$u' = e^x \quad u = e^x \quad v = x \quad v' = 1$$

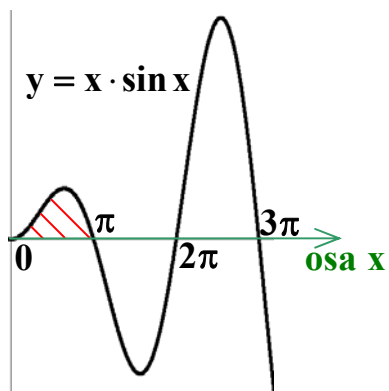
$$S = \int_0^4 x \cdot e^x dx = [x \cdot e^x]_0^4 - \int_0^4 1 \cdot e^x dx = [x \cdot e^x]_0^4 - \int_0^4 e^x dx =$$

$$= [x \cdot e^x]_0^4 - [e^x]_0^4 = (4 \cdot e^4 - 0 \cdot e^0) - (e^4 - e^0) =$$

Příklad 11 / strana 66

Vypočtete plochu vymezenou křivkou

$y = x \cdot \sin x$ a osou x pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$.



$$S = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx \quad \text{řešíme metodou per partes}$$

$$\int_a^b u' \cdot v = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v' \quad u' = \sin x \quad u = -\cos x \quad v = x \quad v' = 1$$

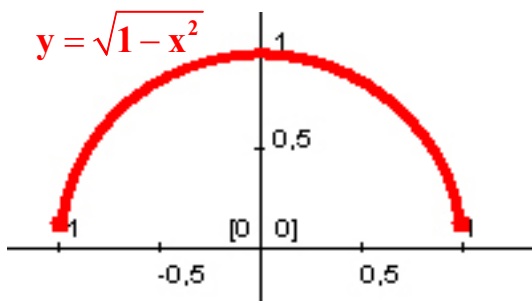
$$S = \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx = [-x \cdot \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x dx = [-x \cdot \cos x]_0^{\pi} +$$

$$+ \int_0^{\pi} \cos x dx = [-x \cdot \cos x]_0^{\pi} + [\sin x]_0^{\pi} = (-\pi \cdot (-1) - 0 \cdot 1) + (0 - 0) = \pi$$

Příklad 12 / strana 66

Vypočtete délku křivky $y = \sqrt{1-x^2}$ pro $x \in (-1; 1)$.

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady



$$s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx \quad (y')^2 = \left[\frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right]^2 =$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$s = \int_{-1}^1 \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\arcsin x]_{-1}^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Příklad 13 / strana 66

Vypočtěte délku křivky $y = \frac{2+x^6}{8x^2}$ pro $x \in (1; 2)$.

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2} dx \quad \left[\left(\frac{2+x^6}{8x^2} \right)' \right]^2 = \left[\frac{6x^5 \cdot 8x^2 - (2+x^6) \cdot 16x}{(8x^2)^2} \right]^2 = \left[\frac{-12x^5}{64x^4} \right]^2 =$$

$$= \left[\frac{48x^7 - 32x - 16x^7}{64x^4} \right]^2 = \left[\frac{32x^7 - 32x}{64x^4} \right]^2 = \left[\frac{32x \cdot (x^6 - 1)}{64x^4} \right]^2 = \left[\frac{x^6 - 1}{2x^3} \right]^2 = \frac{(x^6 - 1)^2}{4x^6}$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$\begin{aligned} s &= \int_1^2 \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{x^6-1}{2x^3}\right)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{(x^6-1)^2}{4x^6}} dx = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{(x^6-1)^2}{4x^6}} dx = \\ &= \int_1^2 \sqrt{1+\frac{x^{12}-2x^6+1}{4x^6}} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{4x^6+x^{12}-2x^6+1}{4x^6}} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{x^{12}+2x^6+1}{4x^6}} dx = \\ &= \int_1^2 \sqrt{\frac{x^{12}+2x^6+1}{4x^6}} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{(x^6+1)^2}{4x^6}} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{(x^6+1)^2}}{\sqrt{4x^6}} dx = \int_1^2 \frac{x^6+1}{2x^3} dx = \int_1^2 \frac{x^6}{2x^3} dx + \int_1^2 \frac{1}{2x^3} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^6}{x^3} dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x^3 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x^{-3} dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{x^{-2}}{2} \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2^{-2}}{2} - -\frac{1^{-2}}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8} + \frac{3}{16} = \frac{33}{16} \end{aligned}$$

Funkce dvou a více proměnných

Příklad 6 / strana 76

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

Vyjádřete bod A[6; 3; 2] v cylindrických a sférických souřadnicích.

Cylindrické souřadnice :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} \doteq 6,7$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{3}{6} = 26^\circ 33'$$

$$z = z = 2 \quad \Rightarrow \quad A[6,7; 26^\circ 33'; 2]$$

Sférické souřadnice :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

$$\vartheta = \ar \cos \frac{z}{r} = \ar \cos \frac{2}{7} = 73^\circ 23'$$

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{3}{6} = 26^\circ 33' \quad \Rightarrow \quad A[7; 73^\circ 23'; 26^\circ 33']$$

Příklad 7 / strana 76

Vyjádřete bod B, který má sférické souřadnice $r = 2$; $\vartheta = 45^\circ$; $\varphi = 30^\circ$, v kartézských souřadnicích.

Kartézské souřadnice :

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi = 2 \cdot \sin(45^\circ) \cdot \cos(30^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 1,22$$

$$y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi = 2 \cdot \sin(45^\circ) \cdot \sin(30^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,71$$

$$z = r \cdot \cos \vartheta = 2 \cdot \cos(45^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \doteq 1,41 \quad \Rightarrow \quad B[1,22; 0,71; 1,41]$$

Příklad 8 / strana 76

Vyjádřete bod B, který má sférické souřadnice $r = 3$; $\vartheta = 60^\circ$; $\varphi = 30^\circ$, v kartézských souřadnicích.

Kartézské souřadnice :

$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi = 3 \cdot \sin(60^\circ) \cdot \cos(30^\circ) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2,25$$

$$y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi = 3 \cdot \sin(60^\circ) \cdot \sin(30^\circ) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \doteq 1,3$$

$$z = r \cdot \cos \vartheta = 3 \cdot \cos(60^\circ) = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5 \quad \Rightarrow \mathbf{B}[2,25; 1,3; 1,5]$$

Příklad 9 / strana 76

Určete první parciální derivaci funkce $z = 3x^2y + e^{xy}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + e^{xy} = 6xy + e^{xy} \cdot y = y \cdot (6x + e^{xy}) \quad (e^{2x})' = 2 \cdot e^{2x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} = e^{xy} \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y + e^{xy} = 3x^2 + e^{xy} \cdot x = x \cdot (3x + e^{xy}) \quad (e^{2x})' = 2 \cdot e^{2x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} = e^{xy} \cdot x$$

Příklad 10 / strana 76

Určete první parciální derivaci funkce $z = \frac{x-y}{x+y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-y}{x+y} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$$

kde $u = x - y; \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x} = x - y = 1 - 0 = 1; \quad v = x + y \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = 1 + 0 = 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{x+y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

!!! $u' = \frac{\partial u}{\partial x} = x - y = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$ je-li y samotné v součtu nebo rozdílu,

bereme jej jako konstantu!!!

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{x+y} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$$

kde $u = x - y; \quad u' = \frac{\partial u}{\partial y} = x - y = 0 - 1 = -1; \quad v = x + y \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 + 1 = 1$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x-y}{x+y} = \frac{-1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

Příklad 11 / strana 77

Určete první parciální derivaci funkce $z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

$$z = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \quad \text{je funkce složená,} \quad (\operatorname{arc\,tg} a)' = \frac{1}{1+a^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1 \cdot x - y \cdot 0}{x^2} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{x}{x^2} = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Příklad 12 / strana 77

Určete první parciální derivaci funkce $z = \frac{x \cdot y}{x - y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x \cdot y}{x - y} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$$

$$\text{kde } u = x \cdot y; \quad u' = \frac{\partial u}{\partial x} = x \cdot y = 1 \cdot y = y; \quad v = x - y \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = 1 - 0 = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x \cdot y}{x - y} = \frac{y \cdot (x - y) - x \cdot y \cdot 1}{(x - y)^2} = \frac{xy - y^2 - xy}{(x - y)^2} = \frac{-y^2}{(x - y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \cdot y}{x - y} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$$

$$\text{kde } u = x \cdot y; \quad u' = \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot y = x \cdot 1 = x; \quad v = x - y \quad v' = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 - 1 = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \cdot y}{x - y} = \frac{x \cdot (x - y) - x \cdot y \cdot (-1)}{(x - y)^2} = \frac{x^2 - xy + xy}{(x - y)^2} = \frac{x^2}{(x - y)^2}$$

Příklad 13 / strana 77

Určete $\frac{dz}{dx}$ pro funkci $z = e^{u-2v}$, kde $u = \sin x$, $v = x^3$.

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$z = e^{u-2v}$ do výrazu dosadíme za u a za v a zderivujeme

$$\frac{dz}{dx} = e^{\sin x - x^3} = e^{\sin x - 2x^3} \cdot (\cos x - 6x^2) \quad e^{k \cdot x} = e^{k \cdot x} \cdot (k \cdot x)' = e^{k \cdot x} \cdot k$$

Příklad 14 / strana 77

Určete $\frac{dz}{dt}$ pro funkci $z = x^2 + xy^2$, kde $x = e^{2t}$, $y = \sin t$.

$z = x^2 + xy^2$ do výrazu dosadíme za x a za y

$$\frac{dz}{dt} = (e^{2t})^2 + e^{2t} \cdot \sin^2 t = 2 \cdot e^{2t} \cdot e^{2t} \cdot 2 + e^{2t} \cdot 2 \cdot \sin^2 t + e^{2t} \cdot 2 \cdot \sin t \cdot \cos t =$$

$$= 2e^{2t} \cdot (2e^{2t} + \sin^2 t) + e^{2t} \cdot \sin 2t$$

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \sin t \cdot \cos t = \sin 2t$$

Příklad 15 / strana 77

Určete $\frac{dz}{dt}$ pro funkci $z = e^{xy} \cdot \ln(x + y)$, kde $x = 2t^2$, $y = 1 - 2t^2$.

$z = e^{xy} \cdot \ln(x + y)$ do výrazu dosadíme za x a za y

$$\frac{dz}{dt} = e^{xy} \cdot \ln(x + y) = e^{2t^2(1-2t^2)} \cdot \ln(2t^2 + 1 - 2t^2) = e^{2t^2(1-2t^2)} \cdot \ln(1) = e^{2t^2(1-2t^2)} \cdot 0 = 0$$

Příklad 16 / strana 77

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce

$$z = 4x^3 - 2y^2 + 3xy^2 + 5y^3.$$

1. parciální derivace z podle x : $\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - 0 + 3y^2 + 0 = 12x^2 + 3y^2$

2. parciální derivace z podle x : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 24x + 0 = 24x$

1. parciální derivace z podle y : $\frac{\partial z}{\partial y} = 0 - 4y + 6xy + 15y^2 = -4y + 6xy + 15y^2$

2. parciální derivace z podle y : $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4 + 6x + 30y$

$$\text{smíšená parciální derivace podle } x : \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = -4y + 6xy + 15y^2 = 0 + 6y + 0 = \mathbf{6y}$$

$$\text{smíšená parciální derivace podle } y : \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 12x^2 + 3y^2 = \mathbf{6y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{6y}$$

Smíšenou parciální derivaci podle x určíme jako **parciální derivaci 1. parciální derivace podle y**.

Smíšenou parciální derivaci podle y určíme jako **parciální derivaci 1. parciální derivace podle x**.

Smíšené parciální derivace podle x a y jsou si rovny!!! $\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y}$

Příklad 17 / strana 78

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce

$$z = x^3 y^2 + 2x^2 y^3 - xy.$$

1. parciální derivace z podle x : $\frac{\partial z}{\partial x} = \mathbf{3x^2 y^2 + 4xy^3 - y}$

2. parciální derivace z podle x : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2 + 4y^3 - 0 = \mathbf{6xy^2 + 4y^3}$

1. parciální derivace z podle y : $\frac{\partial z}{\partial y} = \mathbf{2x^3 y + 6x^2 y^2 - x}$

2. parciální derivace z podle y : $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 + 12x^2 y - 0 = \mathbf{2x^3 + 12x^2 y}$

smíšená parciální derivace podle x : $\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \mathbf{6x^2 y + 12xy^2 - 1}$

smíšená parciální derivace podle y : $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{6x^2 y + 12xy^2 - 1}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \mathbf{6x^2 y + 12xy^2 - 1}$$

Příklad 18 / strana 78

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce $z = xy + \frac{x}{y}$.

Nejprve si určíme derivaci zlomku: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

a) ∂ podle x $u = x$ $u' = 1$ $v = y$ $v' = 0$

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x} = \frac{1 \cdot y - x \cdot 0}{y^2} = \frac{y}{y^2} = \frac{1}{y}$$

b) ∂ podle y $u = x$ $u' = 0$ $v = y$ $v' = 1$

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial y} = \frac{0 \cdot y - x \cdot 1}{y^2} = -\frac{x}{y^2}$$

1. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$

2. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 + 0 = 0$ $\frac{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}{\partial x} = \frac{0 \cdot y + 1 \cdot 0}{y^2} = \frac{0}{y^2} = 0$

1. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$

2. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 - \frac{0 \cdot y^2 - x \cdot 2y}{y^4} = 0 - \frac{-2xy}{y^4} = \frac{2x}{y^3}$

smíšená parciální derivace podle x: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = 1 - \frac{1 \cdot y^2 - x \cdot 0}{y^4} = 1 - \frac{y^2}{y^4} = 1 - \frac{1}{y^2}$

smíšená parciální derivace podle y: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 1 + y^{-2} = 1 + \frac{1}{y^2}$ $\left(\frac{1}{y}\right)' = (y^{-1})' = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 1 + \frac{1}{y^2}$$

Příklad 19 / strana 78

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce $z = e^{xy}$.

1. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} \cdot y$ $(e^{k \cdot a})' = e^{k \cdot a} \cdot (k \cdot a)' = e^{k \cdot a} \cdot k$

2. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xy} \cdot y \cdot y + e^{xy} \cdot 0 = e^{xy} \cdot y^2$

1. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} \cdot x$ **smíšená derivace** $\Rightarrow (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

2. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{xy} \cdot x \cdot x + e^{xy} \cdot 0 = e^{xy} \cdot x^2$

smíšená parciální derivace podle x: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = e^{xy} \cdot y \cdot x + e^{xy} \cdot 1 = e^{xy} \cdot (xy + 1)$

smíšená parciální derivace podle y: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = e^{xy} \cdot x \cdot y + e^{xy} \cdot 1 = e^{xy} \cdot (xy + 1)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = e^{xy} \cdot (xy + 1)$

Příklad 20 / strana 78

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce

$z = x^2y^3 - xy^2 + x^2y + 5$.

1. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 - y^2 + 2xy + 0 = 2xy^3 - y^2 + 2xy$

2. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3 - 0 + 2y = 2y^3 + 2y$

1. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 - 2xy + x^2 + 0 = 3x^2y^2 - 2xy + x^2$

2. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2y - 2x + 0 = 6x^2y - 2x$

smíšená parciální derivace podle x: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = 6xy^2 - 2y + 2x$

smíšená parciální derivace podle y: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 6xy^2 - 2y + 2x$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 6xy^2 - 2y + 2x$

Příklad 21 / strana 78

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce

$$z = xy^4 - y \cdot \ln x - 5x^3y^3 + 1.$$

1. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial z}{\partial x} = y^4 - \left(0 \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x}\right) - 15x^2y^3 + 0 = y^4 - \frac{y}{x} - 15x^2y^3$

2. parciální derivace z podle x: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 - \frac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} - 30xy^3 = \frac{y}{x^2} - 30xy^3$

1. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial z}{\partial y} = 4xy^3 - (1 \cdot \ln x - y \cdot 0) - 15x^3y^2 + 0 =$
 $= 4xy^3 - \ln x - 15x^3y^2$

2. parciální derivace z podle y: $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12xy^2 - 0 - 30x^3y = 12xy^2 - 30x^3y$

smíšená parciální derivace podle x: $\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = 4y^3 - \frac{1}{x} - 45x^2y^2$

smíšená parciální derivace podle y: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 4y^3 - \left(\frac{x - y \cdot 0}{x^2}\right) - 45x^2y^2 = 4y^3 - \frac{1}{x} - 45x^2y^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 4y^3 - \frac{1}{x} - 45x^2y^2$$

Příklad 22 / strana 79

Určete první a druhé parciální derivace (včetně smíšené) funkce $z = \ln \sqrt{\frac{x}{y}}$.

$$z = \ln \sqrt{\frac{x}{y}} = \ln \left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} \quad \text{funkce je složená, kde } \frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$1. \text{ parciální derivace } z \text{ podle } x: \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \cdot 0}{\left(y^{\frac{1}{2}} \right)^2} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{y} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot y} = \frac{x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-1}}{2} = \frac{x^{-1} \cdot y^0}{2} = \frac{1}{2x}$$

$$2. \text{ parciální derivace } z \text{ podle } x: \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{2x} \right)' = (2x^{-1})' = -2x^{-2} = \frac{-1}{2x^2}$$

$$1. \text{ parciální derivace } z \text{ podle } y: \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}}}} \cdot \frac{0 \cdot y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}}{\left(y^{\frac{1}{2}} \right)^2} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{-\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}{y} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot y} = -\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-1}}{2} = -\frac{x^0 \cdot y^{-1}}{2} = \frac{-1}{2y}$$

$$2. \text{ parciální derivace } z \text{ podle } y: \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{-1}{2y} \right)' = (-2y^{-1})' = 2y^{-2} = \frac{1}{2y^2}$$

$$\text{smíšená parciální derivace podle } x: \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = (2y^{-2})' = 0$$

$$\text{smíšená parciální derivace podle } y: \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = (-2x^{-2})' = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 0$$

Příklad 25 / strana 79

$$\text{Dokažte, že platí: } \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \text{ pro funkci } z = xy \cdot \ln \frac{y}{x} .$$

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

$$1. \text{ parciální derivace } z \text{ podle } x: \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \ln \frac{y}{x} + xy \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = y \cdot \ln \frac{y}{x} + xy \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{-y}{x^2} =$$

$$= y \cdot \ln \frac{y}{x} + \frac{-x^2 \cdot y^2}{x^2 \cdot y} = y \cdot \ln \frac{y}{x} - y$$

$$\text{smíšená derivace podle } y: \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 1 \cdot \ln \frac{y}{x} + y \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1 \cdot x - y \cdot 0}{x^2} - 1 = \ln \frac{y}{x} + y \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{x^2} - 1 =$$

$$= \ln \frac{y}{x} + 1 - 1 = \ln \frac{y}{x}$$

$$1. \text{ parciální derivace } z \text{ podle } y: \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \ln \frac{y}{x} + xy \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1 \cdot x - y \cdot 0}{x^2} = x \cdot \ln \frac{y}{x} + xy \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{x^2} =$$

$$= x \cdot \ln \frac{y}{x} + x$$

$$\text{smíšená derivace podle } x: \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = 1 \cdot \ln \frac{y}{x} + x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{0 \cdot x - y \cdot 1}{x^2} + 1 = \ln \frac{y}{x} + x \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{-y}{x^2} + 1 =$$

$$= \ln \frac{y}{x} - 1 + 1 = \ln \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \cdot \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = \ln \frac{y}{x}$$

Použitá literatura:

[1] Tesař, J.: Sbírka úloh z matematiky pro fyziky, PF Jihočeská univerzita České Budějovice

OBSAH

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC.....	1
PŘÍKLAD 2 / STRANA 6.....	1
PŘÍKLAD 3 / STRANA 6.....	1
PŘÍKLAD 4 / STRANA 6.....	2
PŘÍKLAD 5 / STRANA 6.....	2
PŘÍKLAD 6 / STRANA 6.....	3
PŘÍKLAD 7 / STRANA 7.....	3
PŘÍKLAD 8 / STRANA 7.....	4
PŘÍKLAD 9 / STRANA 7.....	4
PŘÍKLAD 10 / STRANA 7.....	5
PŘÍKLAD 11 / STRANA 8.....	5
PŘÍKLAD 12 / STRANA 8.....	6
PŘÍKLAD 13 / STRANA 8.....	7
PŘÍKLAD 15 / STRANA 9.....	7
PŘÍKLAD 16 / STRANA 9.....	8

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

PŘÍKLAD 17 / STRANA 9	9
PŘÍKLAD 18 / STRANA 9	9
VEKTORY	11
PŘÍKLAD 1 / STRANA 17	11
PŘÍKLAD 2 / STRANA 17	11
PŘÍKLAD 3 / STRANA 17	11
PŘÍKLAD 4 / STRANA 17	12
PŘÍKLAD 5 / STRANA 17	12
PŘÍKLAD 6 / STRANA 18	12
PŘÍKLAD 7 / STRANA 18	12
PŘÍKLAD 8 / STRANA 18	13
PŘÍKLAD 9 / STRANA 18	13
PŘÍKLAD 10 / STRANA 18	13
PŘÍKLAD 12 / STRANA 19	14
PŘÍKLAD 15 / STRANA 19	14
PŘÍKLAD 16 / STRANA 19	14
PŘÍKLAD 17 / STRANA 19	15
PŘÍKLAD 18 / STRANA 19	15
PŘÍKLAD 19 / STRANA 20	15
PŘÍKLAD 20 / STRANA 20	16
PŘÍKLAD 21 / STRANA 20	16
PŘÍKLAD 23 / STRANA 21	16
PŘÍKLAD 24 / STRANA 21	17
PŘÍKLAD 25 / STRANA 21	17
PŘÍKLAD 26 / STRANA 21	17
PŘÍKLAD 27 / STRANA 21	18
PŘÍKLAD 28 / STRANA 21	18
PŘÍKLAD 29 / STRANA 21	18
PŘÍKLAD 30 / STRANA 22	19
PŘÍKLAD 31 / STRANA 22	19
PŘÍKLAD 32 / STRANA 22	19
PŘÍKLAD 33 / STRANA 22	20
PŘÍKLAD 35 / STRANA 23	21
PŘÍKLAD 36 / STRANA 23	22
PŘÍKLAD 37 / STRANA 23	23
PŘÍKLAD 38 / STRANA 23	24
PŘÍKLAD 39 / STRANA 23	24
PŘÍKLAD 40 / STRANA 23	25
PŘÍKLAD 41 / STRANA 23	25
PŘÍKLAD 44 / STRANA 24	26
PŘÍKLAD 45 / STRANA 24	26
PŘÍKLAD 46 / STRANA 24	27
PŘÍKLAD 48 / STRANA 24	28
PŘÍKLAD 49 / STRANA 24	29
PŘÍKLAD 50 / STRANA 25	29
PŘÍKLAD 51 / STRANA 25	30
PŘÍKLAD 52 / STRANA 25	31
PŘÍKLAD 53 / STRANA 25	32
PŘÍKLAD 54 / STRANA 25	32
PŘÍKLAD 55 / STRANA 25	33
LIMITY	34
PŘÍKLAD 6.1 / STRANA 39	34
PŘÍKLAD 6.2 / STRANA 39	34
PŘÍKLAD 6.3 / STRANA 39	34
PŘÍKLAD 6.4 / STRANA 40	34
PŘÍKLAD 6.5 / STRANA 40	34
PŘÍKLAD 6.6 / STRANA 40	35
PŘÍKLAD 6.8 / STRANA 40	35
PŘÍKLAD 6.9 / STRANA 40	35
PŘÍKLAD 6.10 / STRANA 40	35
PŘÍKLAD 6.12 / STRANA 40	36

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

DERIVACE	37
PŘÍKLAD 7.1 / STRANA 41	37
PŘÍKLAD 7.2 / STRANA 41	37
PŘÍKLAD 7.3 / STRANA 41	37
PŘÍKLAD 7.4 / STRANA 41	37
PŘÍKLAD 7.5 / STRANA 41	38
PŘÍKLAD 7.6 / STRANA 41	38
PŘÍKLAD 7.7 / STRANA 41	38
PŘÍKLAD 7.8 / STRANA 42	38
PŘÍKLAD 7.9 / STRANA 42	38
PŘÍKLAD 7.10 / STRANA 42	39
PŘÍKLAD 7.11 / STRANA 42	39
PŘÍKLAD 7.12 / STRANA 42	40
PŘÍKLAD 7.13 / STRANA 42	40
PŘÍKLAD 7.14 / STRANA 42	40
PŘÍKLAD 7.15 / STRANA 42	41
PŘÍKLAD 7.16 / STRANA 42	41
PŘÍKLAD 7.17 / STRANA 43	41
PŘÍKLAD 7.18 / STRANA 43	42
PŘÍKLAD 7.19 / STRANA 43	42
PŘÍKLAD 7.20 / STRANA 43	43
PŘÍKLAD 7.21 / STRANA 43	43
PŘÍKLAD 7.22 / STRANA 43	44
PŘÍKLAD 7.23 / STRANA 43	44
PŘÍKLAD 7.24 / STRANA 43	44
PŘÍKLAD 7.25 / STRANA 43	45
PŘÍKLAD 7.26 / STRANA 43	47
PŘÍKLAD 7.27 / STRANA 44	47
PŘÍKLAD 7.28 / STRANA 44	47
PŘÍKLAD 7.30 / STRANA 44	47
PŘÍKLAD 7.31 / STRANA 44	48
PŘÍKLAD 7.32 / STRANA 44	49
PŘÍKLAD 7.33 / STRANA 44	49
PŘÍKLAD 7.34 / STRANA 45	49
PŘÍKLAD 8.1 / STRANA 45	50
PŘÍKLAD 8.2 / STRANA 45	50
PŘÍKLAD 8.3 / STRANA 45	51
PŘÍKLAD 8.5 / STRANA 45	52
PŘÍKLAD 8.6 / STRANA 45	53
PŘÍKLAD 9 / STRANA 45	53
NEURČITÝ INTEGRÁL	55
PŘÍKLAD 1 / STRANA 54	55
PŘÍKLAD 2 / STRANA 54	55
PŘÍKLAD 3 / STRANA 55	55
PŘÍKLAD 4 / STRANA 55	56
PŘÍKLAD 5 / STRANA 55	56
PŘÍKLAD 6 / STRANA 55	56
PŘÍKLAD 7 / STRANA 55	57
PŘÍKLAD 8 / STRANA 55	57
PŘÍKLAD 9 / STRANA 55	57
PŘÍKLAD 10 / STRANA 56	58
PŘÍKLAD 11 / STRANA 56	58
PŘÍKLAD 12 / STRANA 56	58
PŘÍKLAD 13 / STRANA 56	59
PŘÍKLAD 14 / STRANA 56	60
PŘÍKLAD 15 / STRANA 56	60
PŘÍKLAD 16 / STRANA 57	60
PŘÍKLAD 17 / STRANA 57	61
PŘÍKLAD 18 / STRANA 57	61
PŘÍKLAD 19 / STRANA 57	61
PŘÍKLAD 20 / STRANA 57	62

Sbírka úloh z matematiky pro fyziky (J. Tesař) – řešené příklady

PŘÍKLAD 21 / STRANA 57	62
PŘÍKLAD 22 / STRANA 57	63
PŘÍKLAD 23 / STRANA 57	63
PŘÍKLAD 24 / STRANA 58	63
PŘÍKLAD 25 / STRANA 58	64
PŘÍKLAD 26 / STRANA 58	64
PŘÍKLAD 27 / STRANA 58	64
PŘÍKLAD 28 / STRANA 58	65
PŘÍKLAD 29 / STRANA 58	65
PŘÍKLAD 30 / STRANA 58	66
PŘÍKLAD 31 / STRANA 59	66
PŘÍKLAD 32 / STRANA 59	67
PŘÍKLAD 33 / STRANA 59	67
PŘÍKLAD 34 / STRANA 59	68
PŘÍKLAD 35 / STRANA 59	68
PŘÍKLAD 36 / STRANA 59	68
PŘÍKLAD 37 / STRANA 59	69
PŘÍKLAD 39 / STRANA 60	70
PŘÍKLAD 40 / STRANA 60	70
URČITÝ INTEGRÁL	72
PŘÍKLAD 1 / STRANA 64	72
PŘÍKLAD 2 / STRANA 64	72
PŘÍKLAD 3 / STRANA 64	72
PŘÍKLAD 4 / STRANA 65	73
PŘÍKLAD 5 / STRANA 65	73
PŘÍKLAD 6 / STRANA 65	74
PŘÍKLAD 7 / STRANA 65	74
PŘÍKLAD 8 / STRANA 65	75
PŘÍKLAD 9 / STRANA 65	75
PŘÍKLAD 10 / STRANA 65	76
PŘÍKLAD 11 / STRANA 66	77
PŘÍKLAD 12 / STRANA 66	77
PŘÍKLAD 13 / STRANA 66	78
FUNKCE DVOU A VÍCE PROMĚNNÝCH	79
PŘÍKLAD 6 / STRANA 76	79
PŘÍKLAD 7 / STRANA 76	80
PŘÍKLAD 8 / STRANA 76	80
PŘÍKLAD 9 / STRANA 76	81
PŘÍKLAD 10 / STRANA 76	81
PŘÍKLAD 11 / STRANA 77	82
PŘÍKLAD 12 / STRANA 77	82
PŘÍKLAD 13 / STRANA 77	82
PŘÍKLAD 14 / STRANA 77	83
PŘÍKLAD 15 / STRANA 77	83
PŘÍKLAD 16 / STRANA 77	83
PŘÍKLAD 17 / STRANA 78	84
PŘÍKLAD 18 / STRANA 78	85
PŘÍKLAD 19 / STRANA 78	86
PŘÍKLAD 20 / STRANA 78	86
PŘÍKLAD 21 / STRANA 78	87
PŘÍKLAD 22 / STRANA 79	87
PŘÍKLAD 25 / STRANA 79	88